Н.Целакоски, Ѓ.Чупона

ВЕКТОРСКО ВРЕДНОСНИ АЛГЕБАРСКИ СТРУКТУРИ

Вовед

Во последниве две деценији, кај нас и во светот, објавени се трудови со проблематика од векторско вредносни алгебарски структури: групоиди, полугрупи, квазигрупи, групи и други структури со повеќе операции. Објавените трудови по оваа проблематика се сравнително малку на број (нам ни се познати 19 такви трудови - тие се наведени на крајот од овој напис), така што постојат многу недоработени проблеми, има многу (поставени) прашања на кои не е даден одговор.

Подолу ќе дадеме кус приказ на некои од досега познатите резултати и ќе формулираме соодветни проблеми.

На крајот приложуваме список на објавените трудови по оваа проблематика.

1. Векторски групоиди

Поимот векторска функција е добро познат во анализата; неговото испитување таму се врши со помош на компонентните функции. Меѓутоа, за класите векторско вредносни групоиди, полугрупи, квазигрупи и групи се покажа дека е подобро да се дефинираат директно.

Ако $[\ ]: (x_1,\dots,x_n) \mapsto [x_1\dots x_n]=(y_1,\dots,y_m)$ е пресликување од G^n во G^m, тогаш велиме дека структурата $(G;[\ ])$ е (n,m)-*групоид* или *векторски групоид*. Притоа, секако, n и m може да се произволни, но, од разбирливи причини, за натаму ќе претпоставуваме $m \geq 2$ и $n=m+k$, $k \geq 1$. Со суперпозиција може да се дефинираат „сложени производи" со должина $m+sk$ и димензија m, за секој $s \geq 1$.

Еден (n,m)-групоид $(G;[\ ])$ може да се интерпретира и како алгебра $(G;[\ ]_1,\dots,[\ ]_m)$ со m n-арни операции, при што

$$[x_1\dots x_n] = (y_1,\dots,y_m) \Longleftrightarrow (\forall i)\ y_i=[x_1\dots x_n]_i$$

Првото прашање што се наметнува е: како да се изврши класификација на векторските групоиди и, поспецијално: како да се дефинираат векторските полугрупи, квазигрупи и групи.

Еден од начините е да се бара секоја компонентна операција $[\ ]_i$ да го има соодветното својство; но, само тоа, не доведува до ништо битно ново - неопходни се и соодветни врски меѓу компонентните операции. Како што споменавме погоре, во досега публикуваните трудови е избран инаков пат.

2. Векторски полугрупи

Еден (n,m)-групоид $(G;[\ ])$ се вика (n,m)-полугрупа (или векторска полугрупа) ако $[\ ]$ е асоцијативна операција, т.е. ако за секој $i\in\{1,\ldots,k\}$ е точен идентитетот

$$\left[\left[x_1^{m+k}\right]x_{m+k+1}^{m+2k}\right] = \left[x_1^{i}\left[x_{i+1}^{i+m+k}\right]x_{m+k+i+1}^{m+2k}\right]. \tag{1}$$

Тогаш важи и општиот асоцијативен закон, т.е. за секој $s\geq 1$, $(G;[\ ])$ индуцира $(m+sk,m)$-полугрупа $(G;[\ ]_s)$, при што операцијата $[\ ]_s$ се дефинира со:

$$\left[x_1^{m+k}\right]_1 = \left[x_1^{m+k}\right],$$

$$\left[x_1^{m+(s+1)k}\right]_{s+1} = \left[\left[x_1^{m+sk}\right]_s x_{m+sk+1}^{m+(s+1)k}\right].$$

(Натаму, индексот s нема да го пишуваме.)

Воопшто, една $(m+sk,m)$-полугрупа $(Q;[\ ]')$ се вика $(m+sk,m)$-потполугрупа на $(m+k,m)$-полугрупата $(G;[\ ])$, ако $Q\subseteq G$ и

$$[x_1\ldots x_{m+sk}]' = [x_1\ldots x_{m+sk}] \text{ за секој } x_\nu\in Q.$$

Ако $(G;[\ ])$ е $(m+k,m)$-полугрупа, тогаш полугрупата со претставување

$$\langle G;\{x_1\ldots x_m=y_1\ldots y_{m+k}\mid (x_1,\ldots,x_m)=[y_1\ldots y_{m+k}]\}\rangle$$

се вика универзална покривка на $\underline{G}$ и се означува со $\underline{G}\hat{}$. Може да се смета дека $G\subset G\hat{}$, така што се добива

$$G\hat{} = G\cup G^2\cup\ldots\cup G^m\cup G_{m+1}\cup\cdots\cup G_{m+k-1},$$

каде што G^i е декартовиот i-ти степен на G, а G_{m+j} е соодветно фактор множество на G^{m+j}.

Според тоа, $(G;[\ ])$ е $(m+k,m)$-потполугрупа од полугрупата $\underline{G}\hat{}$.

Овој резултат ни кажува дека $(m+k,m)$-полугрупите се потструктури од полугрупи. За $m\geq 2$, а тоа е и нашиот интерес, класата полугрупи што допуштаат $(m+k,m)$-потполугрупи е доста тесна.

Да забележиме дека множеството

$$G^{*} = G^m\cup G_{m+1}\cup\cdots\cup G_{m+k-1}$$

е идеал во $G\hat{}$; G^{*} се вика јака покривка на $(G;[\ ])$.

На секој „векторски" идентитет (1) му одговараат по m „скаларни" идентитети, така што класата (m+к,m)-полугрупи може да се толкува како многуобразие универзални алгебри со m m+к-арни операции.

3. Векторски групи

За една (m+к,m)-полугрупа $(G;[\ ])$ велиме дека е (m+к,m)-група или векторска група, ако е исполнет следниов услов:

$$(\forall a\in G^{k},\ b\in G^{m})(\exists x,y\in G^{m})\ \ [ax]=b,\ [ya]=b.$$

Значи, формално, дефиницијата на векторска група е иста како на обична група. Аналогијата се пренесува и на други ситуации. На пример: (m+к,m)-полугрупата $(G;[\ ])$ е (m+к,m)-група акко постојат (m+к,m)-операции

$$[\backslash]\ :(x_1,\dots,x_{m+k})\mapsto [x_1\dots x_k\backslash x_{k+1}\dots x_{m+k}],$$

$$[/]\ :(x_1,\dots,x_{m+k})\mapsto [x_1\dots x_m/x_{m+1}\dots x_{m+k}],$$

така што да се точни равенствата

$$[x[x\backslash y]] = y, \qquad [[y/x]x] = y,$$

за секои $x\in G^{k}$, $y\in G^{m}$. Последново својство укажува на тоа дека класата (m+к,m)-групи е еквивалентна со соодветно многуобразие алгебри со 3m m+к-арни операции.

Повеќе познати резултати за n-групите, т.е. за (n,1)-групите, може да се пренесат и за (m+к,m)-групите. На пример:

$(G,[\ ])$ е (m+к,m)-група акко $(G;[\ ]_s)$ е (m+sк,m)-група за некој s, акко G^* е група.

Скоро сите познати врски меѓу една n-група (т.е. (n,1)-група) G и нејзината универзална покривка $G^\wedge$ (во овој случај $=G^*$) на соодветен начин се пренесуваат и кај векторските групи, со тоа што овде улогата на $G^\wedge$ ја презема G^*.

4. Векторски квазигрупи

Поимот векторска квазигрупа е дефиниран на два начина. Според првата дефиниција еден (m+к,m)-групоид $(G;[\ ])$ е (m+к,m)-квазигрупа (или векторска квазигрупа), ако за секои $a\in G^{i}$, $b\in G^{k-i}$, $c\in G^{m}$, $i\in\{0,1,\dots,k\}$ равенката

$$[axb] = c$$

е еднозначно решлива по x во G^{m}.

Според втората дефиниција, еден (n,m)-групоид $(G;[\ ])$ (се допушта да биде и n < m) е (n,m)-квазигрупа, акко при зададени $x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_n}$ $(1<i_1<i_2<\dots<i_n<m+n)$ постои еднозначно определена низа $x_1\dots x_{m+n}\in G^{m+n}$, таква што

$$[x_1\dots x_n] = (x_{n+1},\dots,x_{n+m}).$$

Секоја од овие две дефиниции има и предности и недостатоци. Имено, ако се прифати првата дефиниција, се доаѓа до тврдењето дека: еден векторски групоид е векторска група акко е и квазигрупа и полугрупа, додека, ако се земе за основа втората дефиниција, се добива дека: не постојат неединични $(m+k,m)$-групи (за $m \geq 2$) што се и $(m+k,m)$-квазигрупи. Меѓутоа, втората дефиниција се покажува како поцелисходна, ако на (n,m)-квазигрупите им се даде соодветно геометриско толкување како n-димензионални решетки.

Речиси во сите објавени трудови (освен во еден) за основа се зема втората дефиниција.

5. Векторско вредносни универзални алгебри

Јасен е начинот за воведување на поимот векторско вредносна алгебарска структура од тип F.

Имено, нека F е множество оператори, при што на секој оператор $f \in F$ му се придружуваат два броја: должина $|f| \geq 0$ и димензија $[f] \geq 1$. Алгебра $\mathcal{A}$ од тип F со носител A се добива ако секој $f \in F$ е интерпретиран како пресликување од A^n во A^m, каде што $|f|=n$ и $[f]=m$.

На секој $f \in F$ му придружуваме множество $\overline{f}=\{f_1,f_2,\ldots,f_m\}$ со m елементи, каде што $m=[f]$. Притоа претпоставуваме дека $\overline{f} \cap \overline{g} \neq \emptyset$ акко $f=g$. Тогаш, ставајќи $\overline{F} = \bigcup_{f \in F} \overline{f}$ и интерпретирајќи го секој $f_i \in \overline{F}$ како n-арен оператор, при што $f_i \in \overline{F}$ и $|f|=n$, добиваме дека на секоја векторско вредносна F-алгебра $\mathcal{A}$ ѝ одговара соодветна компонентна $\overline{F}$-алгебра $\overline{\mathcal{A}}$. Имено, ако $f(a_1,\ldots,a_n)=$ $=(b_1,\ldots,b_m)$ во $\mathcal{A}$, тогаш ставаме $b_i=f_i(a_1,\ldots,a_n)$.

Поимот F-формула се дефинира на обичен начин со помош на атомарните формули, а овие со помош на терми. F-термиите се дефинираат на следниов начин:

(i) Секоја непразна конечна низа u од променливи е F-терм. Димензијата $[u]$ на u се совпаѓа со неговата должина $|u|$.

(ii) Ако $t_1,t_2,\ldots,t_m$ се F-терми, а $f \in F$ е таков што $|f|=[t_1]+\ldots+[t_m]$, тогаш $ft_1t_2\ldots t_m$ е F-терм со димензија $[f]$.

(iii) Стандардно.

Ако u и v се F-терми такви што $[u]=[v]$, тогаш $=uv$ е атомарна F-формула. Натаму - сè е стандардно.

На секоја атомарна F-формула α може да ѝ се придружи конјункција $\overline{\alpha}$ од атомарни $\overline{F}$-формули и, воопшто, на секоја F-формула β и се придружува $\overline{F}$-формула $\overline{\beta}$; притоа, формулата β е точна на една F-алгебра $\mathcal{A}$ акко формулата $\overline{\beta}$ е точна на компонентната алгебра $\overline{\mathcal{A}}$.

Обичните поими: подалгебра, хомоморфизам, конгруенција, директен производ и др. се дефинираат директно или преку компонентните алгебри.

6. Неколку проблеми

Подолу ќе одбележиме само неколку отворени прашања, во врска со векторско вредносните алгебарски структури.

6.1. Најоптимална е задачата за изградување теорија на $(m+k,m)$-груноидите, полугрупите, групите и квазигрупите за $m \geq 2$, $k \geq 1$. Но, веројатно е поцелисходно да се оди кон општиот случај преку поспецијалните. Така, ако сакаме да го обопштиме случајот $m=1$, $k=1$, тогаш ќе имаме

$$n = m+1, \quad n = 2m, \quad m|n,$$

па затоа може да се разгледува и секој од тие случаи. На пример, се покажува дека $(2m,m)$-група $(G;[\ ])$ е специјална група $(G^m;o)$ и, притоа, голем дел од теоријата на бинарните групи може да се пренесе на $(2m,m)$-групите. Нема причини да се сметаат за неинтересни и најспецијалните случаи, како на пример: $n=3$, $m=2$.

6.2. Векторските полугрупи и групи може да се класифицираат директно, или со помош на нивните покривачки полугрупи. Така, ако $\mathcal{C}$ е класа (бинарни) полугрупи, лесно се доаѓа до повеќе „разумни" класи $\mathcal{C}(n,m)$, такви што $\mathcal{C}(2,1)=\mathcal{C}$, но за $m \geq 2$ не е едноставно да се одговори на прашањето дали $\mathcal{C}(n,m)$ е непразна класа, а уште потешко е да се опишат членовите на $\mathcal{C}(n,m)$. Се разбира, овие прашања се осмислени и за други видови векторски структури.

6.3. Проблемот за егзистенција на векторски (n,m)-полугрупи (групи, квазигрупи) за $m=1$ е тривијален, бидејќи може да се искористат бинарните структури. Но, ситуацијата за $m \geq 2$ е сосем поинаква. На пример, не е познато, при дадени $m \geq 2$, $k \geq 1$, за какви природни броеви q постои $(m+k,m)$-група со q елементи. Од интерес е прашањето само во случајот кога m не е делител на k, зашто за $m|k$, ако G е група со ред q, тогаш таа индуцира и $(m+k,m)$-група со ред m. Познато, е на пример, дека ако q не се дели со 6, тогаш не постои $(3,2)$-група со ред q, а не е познато дали постои конечна $(3,2)$-група.

6.4. При кои услови една $(m+k,m)$-полугрупа е $(m+k,m)$-потполугрупа од $(m+1,m)$-полугрупа ($(m+1,m)$-група)?

6.5. Засега не се согледува како би се добила соодветна класа „векторско вредносни прстени".

6.6. За една класа F-алгебри $\mathcal{K}$ велиме дека е F-аксиоматизирлива акко се совпаѓа со класата F-алгебри на кои се точни сите формули од дадено множество F-формули, Σ.

Јасно е дека, ако $\mathcal{K}$ е аксиоматизирлива со Σ, тогаш $\overline{\mathcal{K}}$ е аксиоматизирлива со $\overline{\Sigma}$. Се наметнува задачата да се даде опис на класата F-аксиоматизирливи F-алгебри.

Поспецијално: да се опишат класите F-алгебри што можат да се окарактеризираат со:

а) атомарни F-формули, т.е. идентитети,
б) квазиидентитети,
в) хорновски формули,
г) отворени формули, итн.

7. Список на објавени трудови

[1] Одобеску С.С.: Изотопия мультиопераций, Исслед. по теор. квазигрупп и луп, Кишинев 1973, 127-132

[2] Сандик М.Д.: Обратимые мультиоперации и подстановки, Acta Sci. Math. 39, 1977, 153-162

[3] Стојменовски К.: За [m,n]-квазигрупите, Год. зб. Матем. фак. Скопје, 28, 1977, 33-37

[4] Трпеновски Б., Чупона Ѓ.: [m,n]-групоиди, Билтен ДМФ СРМ Скопје, 21, 1970, 19-29

[5] Чупона Ѓ.: Една класа делумни алгебри, Год. зб. Прир.мат. фак. Скопје, 22, 1972, 5-37

[6] Čupona Ǵ., Ušan J., Stojaković Z.: Multiquasigroups and some related structures, Maced. Acad. Sci. and Arts, Contributions, Sect. Math. Techn. Sci I.2, 1980, 5-12

[7] Čupona Ǵ., Stojaković Z., Ušan J.: On finite multiquasigroups, Publ. de l'Inst. math. Belgrade, 29(43), 1981, 53-59

[8] Čupona Ǵ.: Vector valued semigroups, Semigroup Forum, Vol. 26, 1983, 65-74

[9] Čupona Ǵ., Dimovski D.: On a class of vector valued groups, Algebraic conf. Zagreb 1984

[10] Dimovski D.: Some existence conditions for vector valued groups, Год. зб. Матем. фак. кн. 33-34, 1982-1983, 99-103

[11] Polonio M.: On C^{n+1}-systems and [n,m]-groupoids, Proc. Third Alg. conf. Belgrade 1982, 111-116

[12] Polonio M.: Medial multiquasigroups, MANU, Prilozi III 2(1982), 31-39

[13] Schweizer B., Sclar A.: The algebra of multiplace vector-valued functions, Bull. Amer. Math. Soc. 1967, 510-515

[14] Stojaković Z., Paunić D.: Nonlinear multiquasigroups, Zbor. rad. PMF Novi Sad, 10, 1980, 145-148

[15] Stojaković Z.: On bisymmetric [n,m]-groupoids, Zbor. rad. PMF - Novi Sad, 12, 1982,

[16] Stojaković Z.: On a class of bisymmetric [n,m]-groupoids, Proc. Third Alg. conf. Beograd 1982, 139-143

[17] Stojaković Z., Paunić Dj.: Identities on Multiquasigroups, n-ary Structures, Skopje 1982, 195-200

[18] Linn, Rolf: Composition completeness of algebras with (m,n)-place operations (in German), Mitt. Math. Sem. Giessen, N° 160 (1983), 155 pp

19 [~~20~~] Walter F.: Aus der Theorie der Polyquasigroupen, Beiträge Algebra Geom. N° 18 (1984), 23-40