Ѓорѓи Чупона

Пристапни предавања, МАНУ, Скопје, 1982

ПРОШИРУВАЊА НА АЛГЕБАРСКИ СТРУКТУРИ

Добро е позната важноста од проширувања на различни видови математички структури, па во склоп на ова и од проширувања на алгебарски структури. Работава е посветена на еден вид проширувања, т.е. на проширувања што се предмет на истражувања на авторот и на неколку негови соработници. Поголемиот дел од резултатите што се формулираат веќе се публикувани или се во печат.

Работава е поделена на четири параграфи. Во првиот се разгледува општиот поим за проширувања на алгебри, при што поголемо внимание им се посветува на обопштените подалгебри на алгебри од дадена многукратност. Во вториот параграф се испитуваат класите n-потполугрупи на неколку класи полугрупи. Во третиот параграф се разгледуваат подасоцијативи на полугрупи, како и класи алгебри помалу или повеќе блиски до нив. Во четвртиот параграф се споменати уште неколку резултати што се во врска со соодветни проширувања на алгебарски структури.

При формулирањето на резултатите се даваат информации и за работите каде што се докажани тие резултати, при што [i;j,k,...] значи дека се работи за работата со номер i, додека другите броеви укажуваат на тоа во кој дел од работата се наоѓа резултатот, односно тие се изоставаат ако целата работа ја третира соодветната проблематика. Резултатите чиишто извори не се споменуваат или се добро познати или се непубликувани резултати на авторот.

§1. ОБОПШТЕНИ ПОДАЛГЕБРИ

<u>1.1. Алгебри</u>. Нека F е множество финитарни оператори т.е. F е унија на низата дисјунктни множества $\{F_n \mid n=0,1,2,\dots\}$; ако $f\in F_n$, тогаш велиме дека f е <u>n-арен</u> <u>оператор</u>, односно <u>константа</u> ако n=0. Нека $X=\{x_1,x_2,x_3,\dots\}$ е бесконечно преброиво множество, чии елементи ги викаме <u>променливи</u>, а F_X е пресекот на сите множества C низи над $F\cup X$ со следните својства: (i) $X\subseteq C$;

(ii) $f \in F_n$, $\xi_1,\dots,\xi_n \in C \Rightarrow f\xi_1\dots\xi_n \in C$. Елементите на F_X ги викаме F-*терми*. Ако во конструкцијата на термот ξ не учествуваат променливи различни од $x_1, x_2, \dots, x_n$, тогаш ќе пишуваме и $\xi(x_1,\dots,x_n)$ наместо ξ; во тој случај со $\xi(\xi_1,\dots,\xi_n)$ ќе го означуваме термот што се добива кога во ξ секое појавување на променливата x_ν се замени со термот ξ_ν.

Ако $\xi, \eta \in F_X$, тогаш за $\xi \equiv \eta$ велиме дека е *атомарна F-формула*. Со примена на логичките оператори: негација, конјункција, дисјункција, импликација и еквиваленција, од атомарните F-формули го добиваме множеството *отворени* F-формули; ако се дозволи и квантификување на променливи, се добива множеството од сите F-формули. Ние ќе се сретнуваме, главно, со атомарните и *квазиатомарните* формули, т.е. формулите од облик: $\xi_1 \equiv \eta_1 \wedge \dots \wedge \xi_n \equiv \eta_n \rightarrow \xi \equiv \eta$; за натаму, наместо атомарна (односно квазиатомарна) формула, ќе велиме *идентитет* (односно *квазиидентитет*).

За $\underline{A}$ велиме дека е F-*алгебра* со *носител* A, ако на секој n-арен оператор $f \in F$ му е придружена n-арна операција $f_{\underline{A}}$ на A; резултатот од примената на операцијата $f_{\underline{A}}$ на низата $a_1,\dots,a_n$ ќе го означуваме со $f_{\underline{A}}a_1\dots a_n$, а во случај кога не постои опасност од недоразбирање индексот $\underline{A}$ ќе го изоставаме. На секој F-терм $\xi(x_1,\dots,x_n)$ му придружуваме n-арна операција $\xi_{\underline{A}}:(a_1,\dots,a_n) \mapsto \xi_{\underline{A}}(a_1,\dots,a_n)$ на обичен начин; и во овој случај, индексот $\underline{A}$ често ќе го изоставаме. Исто така, јасна е смислата на исказот "еден идентитет (односно квазиидентитет) е точен на дадена алгебра"; истото се однесува и за произволни формули. Ако Σ е множество формули, тогаш со $\mathrm{Mod}\,\Sigma$ ја означуваме класата F-алгебри на кои се точни сите формули од Σ. За класата F-алгебри $\mathcal{M}$ велиме дека е *многукратност* (односно *квазимногукратност*) ако постои множество идентитети (односно квазиидентитети) такви што $\mathcal{M} = \mathrm{Mod}\,\Sigma$. Секоја многукратност е и квазимногукратност, но обратното не важи. Ако Σ е множество F-идентитети, тогаш со $\langle\Sigma\rangle$ ќе го означуваме множеството од сите F-идентитети што се последици од Σ, т.е. $\xi \equiv \eta \in \langle\Sigma\rangle$ ако $\xi \equiv \eta$ е точен во секоја алгебра во која се точни сите идентитети од Σ. Да забележиме дека $\langle\Sigma\rangle$ се состои од сите F-идентитети акко $\mathrm{Mod}\,\Sigma$ се состои само од единични алгебри; во овој случај ќе велиме дека $\mathrm{Mod}\,\Sigma$ е *единична многукратност*, а во иднина ќе работиме само со неединични многукратности. Ако B е множество (дисјунктно со F), тогаш со $\langle B\rangle_\Sigma$ ќе ја означуваме алгебрата од многукратноста Mod Σ што е слободно генерирана од B; во иста смисла, со $\langle B;\Lambda\rangle_\Sigma$ ќе ја означуваме алгебрата од Mod Σ генерирана од B, при определувачки релации Λ. Ако Mod Σ е фиксна многукратност, тогаш индексот Σ го изоставуваме.

Натаму, наместо "$\equiv$" ќе пишуваме "=", т.е. знакот "=" ќе се употребува и како "логички симбол на јазикот" и како "симбол на метајазикот". За променливите ќе ги употребуваме и буквите $x,y,z,u,y_1,z_1,u_1,\ldots$. Обично, во случај кога F се состои само од еден бинарен оператор, на пример, "*", наместо $*^k x_1x_1\ldots x_{k+1}$ ќе пишуваме $x_1x_2\ldots x_{k+1}$, што овозможува во термите да не се појавува знакот на операторот, но затоа, пак, е неопходна употребата на загради; на пример, термот $*^3x_1x_2x_3*x_4*x_5x_6$ ќе го означуваме со $x_1x_2x_3(x_4(x_5x_6))$.

<u>1.2. Обопштени подалгебри</u>. Секаде натаму во овој параграф ќе претпоставуваме дека F и G се фиксни множества оператори, а $\Delta: f\mapsto f^\Delta$ пресликување од F во множеството G-терми, такво што: $f\in F_n \Longrightarrow f^\Delta = f^\Delta(x_1,\ldots,x_n)$. Пресликувањето Δ индуцира на природен начин пресликување од F_X во G_X, кое што ќе биде означено со истата ознака Δ.

За F-алгебрата $\underline{A}$ велиме дека е Δ-подалгебра од G-алгебрата $\underline{B}$ ако носителот A на $\underline{A}$ е подмножество од носителот B на $\underline{B}$ и притоа:

$$f_{\underline{A}}a_1\ldots a_n = f^\Delta_{\underline{B}}(a_1,\ldots,a_n), \tag{1}$$

за секој n-арен оператор $f\in F$ и елементи $a_1,a_2,\ldots,a_n\in A$. Јасно е дека за $F = G$ и $f^\Delta = fx_1\ldots x_n$, поимот за Δ-подалгебра се сведува на поимот за обична подалгебра, па затоа често наместо Δ-подалгебра ќе велиме <u>обопштена подалгебра</u>.

Ако $\mathbb{N}$ е класа G-алгебри, а $\mathbb{M}$ класа F-алгебри, тогаш со ${}^\Delta\mathbb{N}$ ја означуваме класата F-алгебри што се Δ-подалгебри од алгебри во $\mathbb{N}$, а со $\mathbb{M}^\Delta$ класата G-алгебри чии Δ-подалгебри се во $\mathbb{M}$. Јасна е точноста на следниве инклузии:

<u>1</u>°. ${}^\Delta(\mathbb{M}^\Delta)\subseteq\mathbb{M}$, $\quad\mathbb{N}\subseteq({}^\Delta\mathbb{N})^\Delta$.

Се наложува прашањето во кој случај во некоја од горните инклузии (или и во двете) важи равенство. Во следните едноставни примери и двете инклузии се вистински.

1) Нека $F = G = \{\cdot\}$, каде што "$\cdot$" е бинарен оператор и нека $.^{\Delta} = x_1x_2$, т.е. Δ-подалгебра е исто што и подгрупоид. Ако $\mathfrak{M}$ е класата нееднинични апериодични групи, тогаш $\mathfrak{M}^{\Delta} = \emptyset$, па според тоа: ${}^{\Delta}(\mathfrak{M}^{\Delta}) = \emptyset \subset \mathfrak{M}$.

2) Нека $F = F_1 = \{f\}$, $G = G_2 = \{\cdot\}$ и нека $f^{\Delta} = x_1x_1$. Ако $\mathfrak{N}$ е класата идемпотентни полугрупи, тогаш $({}^{\Delta}\mathfrak{N})^{\Delta}$ е класата идемпотентни групоиди, од што следува дека $\mathfrak{N} \subset ({}^{\Delta}\mathfrak{N})^{\Delta}$.

Ќе воведеме уште еден поим. Нека $\mathfrak{M} = {}^{\Delta}\mathfrak{N}$ и нека $\underline{B} \in \mathfrak{N}$. На носителот B од алгебрата $\underline{B}$ може да се изгради F-алгебра, $\underline{B}'$, ако се стави:

$$f_{\underline{B}'}b_1\ldots b_n = f^{\Delta}_{\underline{B}}(b_1,b_2,\ldots,b_n) \tag{2}$$

за секој n-арен оператор $f \in F$ и низа елементи $b_1,\ldots,b_n \in B$. Добиената алгебра $\underline{B}'$ не мора да припаѓа на класата $\mathfrak{M}$. Ова ни ја сугерира следнава дефиниција. За тројката $(\Delta;\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ велиме дека е компатибилна ако секоја алгебра $\underline{A} \in \mathfrak{M}$ е Δ-подалгебра на алгебра $\underline{B} \in \mathfrak{N}$ таква што $\underline{B}' \in \mathfrak{M}$, каде што $\underline{B}'$ е определена со (2).

3) Нека $F = F_2 = \{o\}$ и нека $\mathfrak{N}$ е многукратноста прстени. Ако Δ се определи со: $o^{\Delta}=x_1x_2$, добиваме дека ${}^{\Delta}\mathfrak{N}$ е многукратноста групоиди. Ако $\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2,\mathfrak{M}_3$ е класата комутативни групоиди, полугрупи, групи, соодветно, тогаш тројките $(\Delta;\mathfrak{M}_1,\mathfrak{N})$, $(\Delta;\mathfrak{M}_2,\mathfrak{N})$ се компатибилни, додека $(\Delta;\mathfrak{M}_3,\mathfrak{N})$ не е компатибилна.

4) [24] Ако F и $\mathfrak{N}$ се како и во 3) и ако $o^{\Delta}=x_1+x_2-x_1x_2$, тогаш важат истите заклучоци како и во 3).

Во поголемиот дел од натамошните разгледувања во работава се решаваат конкретни случаи од следнава задача: "При дадени F,G,Δ и $\mathfrak{N}$, да се определи ${}^{\Delta}\mathfrak{N}$." Еден прилог кон решавање на оваа задача претставува следново тврдење:

$\underline{2}^{\circ}$ [45;5]. Нека Θ е множество G-формули и нека Σ е множеството отворени F-формули што се $F \cup G$-последици на следново множество формули:

$$\Theta \cup \{fx_1\ldots x_n = f^{\Delta} \mid f \in F_n,\ n=0,1,2,\ldots\}. \tag{3}$$

Тогаш е точно равенството $\mathrm{Mod}\Sigma = {}^{\Delta}(\mathrm{Mod}\,\Theta)$. (Соодветни варијанти и обопштувања на овој резултат можат да се најдат во [7;IV.8], [11;I.4] и [48].) Овој резултат, и покрај својата општост, не дава одговор на соодветни конкретни прашања, како, на пример, "Дали $\mathrm{Mod}\Sigma$ може да се дефинира со конечен систем аксиоми и кои се тие?", "Дали е $\mathrm{Mod}\Sigma$ многукратност (квазимногукратност)?".

Не ни е познат задоволителен одговор на прашањето "Каква треба да биде класата $\mathbb{M} \subseteq {}^{\Delta}\mathbb{N}$ за да биде компатибилна тројката $(\Delta;\mathbb{M},\mathbb{N})$?". За сега, исто така, имаме малу информации за класата $\mathbb{M}^{\Delta}$ при познати F, G, Δ и $\mathbb{M}$.

<u>1.3. Обопштени подалгебри на алгебри од една многукратност</u>. Познато е ([7;V.11] или [11;I.5]) дека класата Δ-подалгебри од алгебрите на една квазимногукратност е исто така квазимногукратност, па според тоа ако $\mathbb{N}$ е многукратност, тогаш ${}^{\Delta}\mathbb{N}$ е квазимногукратност. Нас нè интересира во кој случај и ${}^{\Delta}\mathbb{N}$ е многукратност. Дека тоа не е секогаш точно се гледа, на пример, од следново својство:

<u>1</u>°. Класата потполугрупи од групи е вистинска квазимногукратност што не може да се дефинира со помош на конечен број квазиидентитети. (Опис на оваа квазимногукратност полугрупи е даден во работите [5] и [6]; резултатите од овие работи можат да се најдат и во монографиите [36;VII.3], [35;12.6]).

Да забележиме дека во секој од примерите 1.2.2),3) и 4) имаме пример на многукратност $\mathbb{N}$ таква што и ${}^{\Delta}\mathbb{N}$ е многукратност.

Следното својство е познато како Теорема на Кон-Ребане. ([36;IV.4], [12], [22])

<u>2</u>°. За секоја F-алгебра $\underline{A}$ постои полугрупа S и фамилија елементи $\{d^f \mid f \in F\}$ од S такви што $A \subseteq S$ и

$$f_{\underline{A}}\, a_1 \ldots a_n = d^f a_1 \ldots a_n \qquad (1)$$

за секој n-арен оператор $f \in F$ и елементи $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Да се вратиме на општата ситуација кога $\mathbb{N} = \mathrm{Mod}\Theta$ е многукратност G-алгебри, а $\Delta : F \mapsto G_X$ дадено пресликување од F во G_X. Лесно се проверува дека:

$\underline{3}^{\circ}$. Множеството идентитети што се точни на секоја алгебра од ${}^{\Delta}\mathbb{N}$ се совпаѓа со:

$$ {}^{\Delta}\theta = \{\xi=\eta \mid \xi^{\Delta} = \eta^{\Delta} \in \langle\theta\rangle\}. \qquad (2)$$

Според тоа:

$\underline{4}^{\circ}$. ${}^{\Delta}\mathbb{N}$ е многукратност акко ${}^{\Delta}\mathbb{N} = \mathrm{Mod}({}^{\Delta}\theta)$. (Инаку, во секој случај, имаме: ${}^{\Delta}\mathbb{N} \subseteq \mathrm{Mod}({}^{\Delta}\theta)$.)

Од ова следува дека:

$\underline{4}'$. ${}^{\Delta}\mathbb{N}$ е многукратност акко секоја алгебра $\underline{A} \in \mathrm{Mod}({}^{\Delta}\theta)$ е Δ-подалгебра од некоја алгебра $\underline{B} \in \mathbb{N} = \mathrm{Mod}\,\theta$.

Тврдењето што сега ќе го формулираме е докажано прво во [11;I.7].

$\underline{5}^{\circ}$. Ако множеството G-идентитети θ и пресликувањето Δ го задоволуваат долу приложениот услов ®, тогаш ${}^{\Delta}\mathrm{Mod}\theta$ е многукратност.

® Ако $\xi'(x_1,\dots,x_p,x)$ е G-терм во кој променливата x се појавува само еднаш и ако постојат F-терми ξ,η такви што $\xi'(x_1,\dots,x_p,\xi^{\Delta}) = \eta^{\Delta} \in \langle\theta\rangle$, тогаш постои F-терм ξ таков што $\xi'(x_1,\dots,x_p,x) = \xi^{\Delta} \in \langle\theta\rangle$.

Условот ®, во општ случај, не е неопходен. На пример, во $\underline{1.2}$.3) и 4) тој услов не е исполнет. Во $\underline{2}^{\circ}$ условот ® е исполнет за $F_o=\emptyset$, а не е исполнет за $F_o\neq\emptyset$.

Ќе укажеме сега на една широка класа пресликувања Δ, каде што ® е и потребен услов.

$\underline{6}^{\circ}$. Нека $F_o = \emptyset$, $G = G_o \cup \{\bullet\}$, каде што "$\bullet$" е бинарен оператор, и нека на секој n-арен оператор $f \in F$ и на секој број $i \in \{0,1,\dots,n\}$ му е придружена низа елементи $\underline{e}_i^f$ од G_o. Ако θ се состои само од асоцијативниот закон $xyz=x(yz)$ (т.е. $\mathrm{Mod}\theta$ е многукратноста полугрупи со константи G_o) и ако Δ се определи со:

$$f^{\Delta} = \underline{e}_0^f x_1 \underline{e}_1^f x_2 \dots \underline{e}_{n-1}^f x_n \underline{e}_n^f, \qquad (3)$$

тогаш ${}^{\Delta}\mathrm{Mod}\theta$ е многукратност акко е исполнет условот ®. (Од теоремата на Кон-Ребане се гледа дека претпоставката $F = \emptyset$ е битна.)

Да забележиме дека во [20] е докажана доволноста на ® и поставено прашање за неговата нужност, а во [11;I.8] е докажано тврдењето $\underline{6}^{\circ}$.

Ако во $\underline{6}^{\circ}$ имаме $G_o = \emptyset$, тогаш (3) добива облик:

$$f^{\Delta} = x_1 x_2 \ldots x_n. \tag{3'}$$

Во овој случај е точно следново тврдење:

$\underline{7}^{\circ}$. [20] Нека $\mathbb{N}$ е многукратноста полугрупи и нека $F_o=\emptyset$. Ако Δ е определено со (3′), тогаш условот ® е исполнет (т.е. ${}^{\Delta}\mathbb{N}$ е многукратност) акко најголемиот заеднички делител d на броевите од множеството $J = \{n \mid F_{n+1} \neq \emptyset\}$ е во J.

Ќе формулираме уште едно тврдење, во кое се воведува и важниот поим за универзална Δ-обвивка, односно Δ-покривка.

Прво, ќе извршиме соодветна подготовка. Ако $\underline{A}$ е F-алгебра, а θ множество G-идентитети, тогаш алгебрата

$$\underline{A}^{\Delta} = \langle A; \{a=f^{\Delta}(a_1,\ldots,a_n) \mid a = f_{\underline{A}} a_1 \ldots a_n\} \rangle_{\theta} \tag{4}$$

е Δ-обвивка на $\underline{A}$ во Modθ; со A^{Δ} го означуваме носителот на $\underline{A}^{\Delta}$. Да потсетиме дека A^{Δ} е фактор-множество на G_A по соодветна релација за еквивалентност. Притоа, G_A е множество G^*-терми без променливи, каде што $G_o^* = G_o \cup A$ и $G_n^* = G_n$ за $n \geq 1$. Ако $a \in A$, тогаш со a° го означуваме елементот на A^{Δ} определен со а.

$\underline{8}^{\circ}$. Алгебрата $\underline{A}$ припаѓа на квазимногукратноста ${}^{\Delta}$Modθ акко различни елементи од A определуваат различни елементи во A^{Δ}. (Во овој случај, идентификувајќи го секој елемент а од A со соодветниот елемент $a^{\bullet}$ од A^{Δ} добиваме дека $\underline{A}$ е Δ-подалгебра од $\underline{A}^{\Delta}$, па затоа за $\underline{A}^{\Delta}$ велиме дека е Δ-покривка на $\underline{A}$ во Modθ.)

Својството $\underline{8}^{\circ}$ ни дава и метод за покажување дека ${}^{\Delta}$Modθ е многукратност. Имено, при претпоставката $\underline{A} \in$ Mod ${}^{\Delta}\theta$, треба да се покаже дека:

$$a,b \in A \rightarrow (a^{\bullet}=b^{\bullet} \rightarrow a=b). \tag{5}$$

Да укажеме и на еден начин за докажување на соодветно тврдење дека ${}^{\Delta}$Mod θ не е многукратност. Прво се уочува квазиидентитет од облик

$$\xi_1^{\Delta} = \eta_1^{\Delta} \wedge \cdots \wedge \xi_k^{\Delta} = \eta_k^{\Delta} \rightarrow \xi^{\Delta} = \eta^{\Delta}, \tag{6}$$

што е последица од θ, при што $\xi_\nu(x_1,\ldots,x_n)$, $\eta_\nu(x_1,\ldots,x_n)$, $\xi(x_1,\ldots,x_n)$, $\eta(x_1,\ldots,x_n)$ се F-терми. Потоа се бираат n различни елементи $a_1,a_2,\ldots,a_n$ и се разгледува алгебрата:

$$\underline{A} = \langle a_1,\ldots,a_n;\ \xi_1(a_1,\ldots,a_n) = \eta_1(a_1,\ldots,a_n),\ldots,\\ \xi_k(a_1,\ldots,a_n) = \eta_k(a_1,\ldots,a_n)\rangle_\theta \tag{7}$$

Ако се покаже дека $\xi(a_1,\ldots,a_n)$ и $\eta(a_1,\ldots,a_n)$ определуваат различни елементи во $\underline{A}$, тогаш ќе се добие дека $\underline{A}$ е алгебра од многукратноста $\mathrm{Mod}^\Delta\theta$ што не припаѓа на квазимногукратноста ${}^\Delta\mathrm{Mod}\theta$, од што би следувало дека ${}^\Delta\mathrm{Mod}\theta$ не е многукратност.

Теоремата на Кон-Ребане укажува на една многукратност алгебри (многукратноста полугрупи со константи) $\mathbb{N}$, таква што ${}^\Delta\mathbb{N}$ се совпаѓа со многукратноста од сите F-алгебри. Во работата [49] е покажано дека, при соодветен избор на пресликувањето Δ, истото својство го има и многукратноста ентропични групоиди со (доволно многу) константи, а работата [47] е посветена на прашањето "Кои многукратности групоиди го имаат ова својство?". Секако, ако θ е множество G-идентитети такво што ${}^\Delta\mathrm{Mod}\theta$ е многукратноста од сите F-алгебри, множеството идентитети ${}^\Delta\theta = \{\xi=\eta \mid \xi^\Delta=\eta^\Delta \in \langle\theta\rangle\}$ се состои само од тривијални идентитети, т.е. идентитети од облик $\xi=\xi$. Природно се наложува прашањето дали тој услов е и доволен. Со следното својство се оправдува тврдењето дека тој услов не е доволен.

<u>9°</u>. Нека F се состои само од еден тернарен оператор f, G само од еден бинарен оператор $\bullet$ и нека $f^\Delta = x_1x_2x_3$. Ако θ се состои само од идентитетот $x_1x_2x_1x_2x_1 = x_1^3x_2^2$ (x^2 е xx, а x^3 е x^2x), тогаш во ${}^\Delta\theta$ нема нетривијални идентитети, но сепак постојат тернарни групоиди што не се Δ-подгрупоиди на групоиди од многукратноста групоиди $\mathrm{Mod}\theta$.

§2. n-ПОЛУГРУПИ

<u>2.1. Универзална покривачка полугрупа</u>. Низ целиот овој параграф ќе претпоставуваме дека F се состои само од еден n-арен оператор f, G се состои од еден бинарен оператор $\bullet$ и дека $f^\Delta = x_1x_2\ldots x_n$. Според <u>1.3.7°</u>, ако SEM е многукратноста

полугрупи, тогаш и ${}^{\Delta}$SEM е многукратност, а алгебрите од ${}^{\Delta}$SEM ги викаме n-полугрупи, т.е. n-потполугрупи од полугрупи. Многукратноста n-полугрупи ја означуваме со SEM(n). Јасно е дека 2-полугрупа е исто што и полугрупа, па затоа секогаш во иднина ќе претпоставуваме дека $n \geq 3$. Следното својство дава поблизок опис на n-полугрупите.

1°. $\underline{A} = (A;f)$ е n-полугрупа акко се точни следниве идентитети:

$$f^2x_1\ldots x_{2n-1}=fx_1fx_2\ldots x_{2n-1}=\ldots=fx_1\ldots x_{n-1}fx_n\ldots x_{2n-1}. \qquad (1)$$

(Ни се чини дека овој резултат првпат е докажан во [45;16], при што тој е добиен како последица на поопшти резултати, а потоа се публикувани повеќе директни докази, како на пример во [16] и [42]. Да забележиме дека, обично, идентитетите (1) се земаат како дефинирачки за SEM(n).

Според 1.2.8° на секоја n-полугрупа $\underline{A}$ и одговара еднозначно определена универзална покривачка полугрупа $\underline{A}^{\Delta}$, при што A е генераторно множество за $\underline{A}^{\Delta}$.

Во иднина операцијата на една n-полугрупа ќе ја означуваме со [ ], т.е. ќе пишуваме $[x_1\ldots x_n]$, наместо $fx_1\ldots x_n$. Како последица на (1) се добива дека во секоја n-полугрупа важи општиот асоцијативен закон, па затоа ќе ги пишуваме само надворешните загради. Според тоа, на секоја низа $a_o,\ldots,a_{p(n-1)}$ од носителот на една n-полугрупа ѝ одговара еднозначно определен елемент (пак од носителот) $[a_o\ldots a_{p(n-1)}]$; притоа $[a]=a$. Исто така, во иднина, наместо "n-полугрупа (A,[ ])" ќе пишуваме "n-полугрупа A".

Подолу ќе споменеме неколку врски што постојат меѓу една n-полугрупа A и нејзината универзална покривка A^{Δ}.

2°. A е слободно генерирана од B акко A^{Δ} е слободно генерирана од B.

За n-полугрупата A велиме дека е комутативна акко го задоволува идентитетот:

$$[x_1x_2\ldots x_n] = [x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}], \qquad (2)$$

за секоја пермутација $\nu\mapsto i_\nu$ на $\{1,2,\ldots,n\}$.

$\underline{3}^{\circ}$. [17;2]. A^{Δ} е комутативна акко A е комутативна и множеството $A\backslash[A^{n}]$ има најмногу еден елемент.

$\underline{4}^{\circ}$. A^{Δ} е конечна акко A е конечна, и притоа за $|A| = t > 1$, имаме:

$$2(n-2)+t \leq |A^{\Delta}| \leq t+t^{2}+\ldots+t^{n-1}+2-n. \qquad (3)$$

$\underline{5}^{\circ}$. [16]. A^{Δ} е група акко A е n-група.

Притоа, за n-полугрупата A се вели дека е n-група акко за секоја низа елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ од A, равенките:

$$[xa_2 \ldots a_n] = a_1, \quad [a_1 a_2 \ldots a_{n-1} y] = a_n$$

се решливи по x и y во A.

Прв доказ на тврдењето дека секоја n-група е n-потполугрупа од група има дадено Пост во [46;I.3], па затоа тој резултат е и познат како Теорема на Пост. Да забележиме дека Теоремата на Пост е всушност последица од $\underline{5}^{\circ}$ и дека оригиналниот доказ на Пост не дозволува обопштување на n-полугрупи, додека доказот на истата теорема даден во [51] е таков што од него може $\underline{5}^{\circ}$ да се извлече како последица.

За полугрупата S велиме дека е покривка на n-полугрупата A ако A е генераторна n-потполугрупа од S. Описот на сите покривки за една n-полугрупа A се дава со следново тврдење:

$\underline{6}^{\circ}$. [16]. Нека A е n-полугрупа и нека $\mathcal{T}$ е множеството од сите конгруенции на A^{Δ} што ги раздвојуваат елементите од A. Тогаш за секоја покривка S на A постои конгруенција $\tau \in \mathcal{T}$ таква што пресликувањето $a \mapsto a^{\tau}$ може на единствен начин да се прошири до изоморфизам од S во A^{Δ}/τ. (Ако ρ е максимален елемент во $\mathcal{T}$, тогаш за A^{Δ}/ρ се вели дека е минимална покривка на A. Во работата [17;4] е покажано дека две минимални покривки од една n-полугрупа не мораат да бидат изоморфни.)

Во [33;2] е докажано следново обопштување на $\underline{5}^{\circ}$:

$\underline{5}'$. A е n-група акко некоја покривка на A е група.

Секако е од интерес испитување на класата n-полугрупи што можат да се покријат со полугрупи без проширување на носителот. На оваа класа не ѝ припаѓа, на пример, тернарната група непарни цели броеви. Инаку, јасно е дека:

$\underline{7}^{\circ}$. A може да се покрие со полугрупа без проширување на носителот акко во $\mathcal{T}$ постои конгруенција таква што во секоја нејзина класа има точно еден елемент од A.

Исто така:

$\underline{8}^{\circ}$. Ако во n-полугрупата A има единица e и ако во A се дефинира бинарна операција $\bullet$ со:

$$x \bullet y = [xe^{n-2}y],$$

тогаш се добива покривачка полугрупа $(A', \bullet)$ на дадената n-полугрупа.

Во [14] е опишана класата n-полугрупи што можат да се сместат во n-полугрупи со единица, при што носителот се проширува само со еден елемéнт, имено со новата единица.

Во работите [2] и [44] (да се види и [28;II.5] и [15]) е докажано следното тврдење познато како Теорема на Хосу-Глускин.

$\underline{9}^{\circ}$. Ако G е n-група, тогаш постои група $(G', \bullet)$, автоморфизам α на групата и елемент $c \in G$ такви што:

$$[x_1 \ldots x_n] = x_1 \bullet \alpha x_2 \ldots \bullet \alpha^{n-1} x_n,$$
$$\alpha c = c, \quad \alpha^{n-1} c = c \bullet x \bullet c^{-1}.$$

Ако P е n-потполугрупа од n-полугрупата A, тогаш P е n-потполугрупа и од полугрупата A^{Δ}, па затоа е природно да се прашаме дали потполугрупата на A^{Δ} генерирана од P е универзална покривка на P. Во работата [42] е покажано дека тоа во општ случај не е точно, а разгледани се и некои случаи кога одговорот е позитивен.

При испитување на n-полугрупите се наметнува прашањето за нивна разумна класификација при што може да се користат познати класи полугрупи. Имено, се поставува задачата: при позната класа полугрупи $\mathcal{K}$ да се дефинира низата класи полугрупи $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \ldots, \mathcal{K}_n, \ldots$ таква што да биде $\mathcal{K} = \mathcal{K}_2$. Ние ги гледаме следните три можности:

(i) да се даде директна дефиниција на $\mathcal{K}_n$,

(ii) $\mathcal{K}_n$ да се дефинира со: $A \in \mathcal{K}_n \Leftrightarrow A^{\Delta} \in \mathcal{K}$,

(iii) $\mathcal{K}_n$ да се дефинира со $A\in\mathcal{K}_n$ акко постои покривка S на A таква што $S\in\mathcal{K}$.

Во [3] и [4] е искористен првиот начин за дефинирање на класата инверзни n-полугрупи и класата потполно регуларни n-полугрупи. За некои својства (на пример, за комутативноста или кратливоста) изгледа е посоодветен третиот начин.

2.2. n-потполугрупи на полугрупи од една многукратност. Ако $\mathcal{M}$ е класа полугрупи, тогаш со $\mathcal{M}(n)$ ќе ја означуваме класата n-полугрупи што се n-потполугрупи на полугрупи од $\mathcal{M}$. Со други зборови, $\mathcal{M}(n)$ се пишува наместо ${}^{\Delta}\mathcal{M}$. Овде ќе се задржиме на случајот кога $\mathcal{M}$ е многукратност полугрупи, т.е. многукратност групоиди во чие множество дефинирачки идентитети се наоѓа и "асоцијативниот закон", т.е. идентитстот:

$$x_1x_2x_3 = x_1(x_2x_3). \tag{1}$$

Ако се има предвид "општиот асоцијативен закон" се доаѓа до заклучок дека секоја многукратност полугрупи може да биде зададена со множество идентитети, во кое, покрај (1), се содржат идентитети од облик:

$$x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_p} = x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_q}, \tag{2}$$

каде што i_ν, j_λ се позитивни цели броеви. Асоцијативниот закон е присутен кај секоја многукратност полугрупи, па затоа многукратностите полугрупи се карактеризираат точно со идентитетите од облик (2), за кои и ќе велиме дека се полугрупни.

Нас нè интересира прашањето: "Каква треба да биде многукратноста полугрупи $\mathcal{M}$ за да биде многукратност и класата $\mathcal{M}(n)$?". Ова прашање ја сугерира задачата да се определи фамилијата множества полугрупни идентитети што го задоволуваат условот ® од 1.3.5°. Оваа задача се решава релативно лесно. Прво, нека со ξ ја означиме, на пример, левата страна од (2) и нека со $|\xi|_i$ го означиме бројот на појавувања на променливата x_i во ξ.

1°. Многукратноста полугрупи $\mathcal{M} = \mathrm{Mod}\Sigma$ го задоволува условот ® акко за секој полугрупен идентитет $\xi=\eta\in\Sigma$ и секој број $i=1,2,\ldots$ имаме $|\xi|_i \equiv |\eta|_i (\mathrm{mod}\, n-1)$. Ако тоа е исполнето, тогаш и $\mathcal{M}(n)$ е многукратност. (Јасно е дека постојат безброј многу многукратности полугрупи со ова својство.)

Ќе дадеме уште безброј многу примери на многукратности $\mathcal{M}$ такви што и $\mathcal{M}(n)$ е многукратност (при што во безброј многу од нив не е исполнет условот ®), како и безброј многу примери со својството $\mathcal{M}(n)$ да не е многукратност.

2°. Нека $\mathcal{P}_{r,m}$ е многукратноста полугрупи определена со идентитетот $x^r=x^{r+m}$, каде што $r \geq 0$, $m \geq 1$ и нека $\mathcal{C}_{r,m}$ е многукратноста комутативни полугрупи што припаѓаат на $\mathcal{P}_{r,m}$. Тогаш:

(i) $\mathcal{P}_{r,m}(n)$ е многукратност акко $r \in \{0,1\}$ или $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\, n-1)$.

(ii) $\mathcal{C}_{r,m}(n)$ е многукратност за секои r, m и n.

(Да забележиме дека $\mathcal{P}_{o,m}$ е многукратноста периодични групи кај кои редот на секој елемент е делител на m.) [41]

3°. Нека $\mathcal{D}^{\ell}$ (односно $\mathcal{D}^r$) е многукратноста полугрупи определена со идентитетот $xyz=xyxz$ (односно со $xyz=xzyz$) и нека $\mathcal{D}=\mathcal{D}^{\ell} \cap \mathcal{D}^r$. Тогаш: $\mathcal{D}(n)$ е многукратност, а $\mathcal{D}^{\ell}(n)$, $\mathcal{D}^r(n)$ не се многукратности. [11;II,4]

4°. Нека $\mathcal{O}_{i,k}$ е многукратноста полугрупи определена со идентитетот $x_1x_2\ldots x_k = x_1\ldots x_{i-1}x_{k+1}x_i\ldots x_k$, каде што $i \in \{1,2,\ldots,k+1\}$. Тогаш, $\mathcal{O}_{i,k}(n)$ е многукратност за секои i,k. [11;II.5]

Погоре немаме пример на многукратност $\mathcal{M}$ комутативни полугрупи, такви што $\mathcal{M}(n)$ да не е многукратност. Во следново тврдење се покажува егзистенција на безброј многу такви многукратности.

5°. Нека $m \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, n-1)$, $m \geq 1$, $r > \max\{m,3\}$. Ако $\mathcal{M}$ е многукратноста полугрупи определена со множеството полугрупни идентитети:

$$xy = yx,\ x^r = x^{r+m},\ x_1^2x_2^2\ldots x_{n-1}^2x_n = x_1x_2\ldots x_{n-2}x_{n-1}^2x_n^2,$$

тогаш $\mathcal{M}(n)$ не е многукратност.

И покрај обемноста на резултатите изнесени во овој дел, сè уште не е познат општ критериум којшто би овозможувал, при дадена многукратност полугрупи $\mathcal{M}$ да утврдиме дали и $\mathcal{M}(n)$ е многукратност.

2.3. n-потполугрупи на полугрупи со кратење. За n-полугрупата А велиме дека е со лево кратење ако го задоволува квазиидентитетот:

$$[x_1x_2\dots x_{n-1}y] = [x_1x_2\dots x_{n-1}z] \to y = z, \tag{1}$$

односно со десно кратење ако:

$$[yx_2\dots x_n] = [zx_2\dots x_n] \to y = z. \tag{1'}$$

А е n-полугрупа со кратење ако е и со лево и со десно кратење.

1°. n-полугрупата А е n-потполугрупа од полугрупа со лево кратење акко А е n-полугрупа со лево кратење во која е точен секој квазиидентитет од облик

$$[\underline{x}\,\underline{y}] = [\underline{x}\,\underline{z}] \to [\underline{u}\,\underline{y}] = [\underline{u}\,\underline{z}], \tag{2}$$

каде што $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{u}$ се низи од променливи. Постои n-полугрупа со лево кратење што не е n-потполугрупа од полугрупа со лево кратење. [17;3]

2°. Класата n-полугрупи со кратење се совпаѓа со класата n-потполугрупи од полугрупи со кратење. [11;III.1]

Да истакнеме дека универзалната покривка A^{Δ} на една n-полугрупа со кратење, не мора да е со кратење,но во класата покривки на А што се полугрупи со кратење постои соодветна универзална покривачка полугрупа $A^{\sim}$. Оваа полугрупа е окарактеризирана со следново својство:

3°. $A^{\sim}$ е генерирана од А и ако $a_1, \dots, a_p$, $b_1, \dots, b_q \in A$, тогаш во $A^{\sim}$ е точно равенството $a_1 . a_2 \dots a_p = b_1 . b_2 \dots b_q$ акко $p \equiv q (\mathrm{mod}\, n-1)$ и $[a^k a_1 \dots a_p] = [a^k b_1 \dots b_q]$ за некој $a \in A$ и природен број k. [11;III.1]

Покрај тоа:

4°. Ако Q е n-група, тогаш $Q^{\sim} = Q^{\Delta}$.

Да истакнеме дека при оригиналниот доказ на Теоремата на Пост всушност е конструирана полугрупата $Q^{\sim}$.

Следното својство овозможува испитувањето на класата n-потполугрупи од групи да се сведе на испитување на класата потполугрупи од групи.

$\underline{5}^{\circ}$. n-полугрупата A е n-потполугрупа од група акко полугрупата $A^{\sim}$ е потполугрупа од група. [11;III.2]

Со помош на ова својство, во [11;III.3] е покажано дека на секој систем аксиоми, во вид на квазиидентитети, на квазимногукратноста потполугрупи од групи му одговара соодветен систем аксиоми, исто така во форма на квазиидентитети, на квазимногукратноста n-потполугрупи од групи. Експлицитното формулирање на еден таков систем аксиоми бара повеќе простор, па затоа овде ќе се задоволиме само со следниот тривијален резултат.

$\underline{6}^{\circ}$. n-полугрупата A е n-потполугрупа од комутативна група акко A е комутативна n-полугрупа со кратење.

<u>2.4. n-подгрупоиди на некои класи групоиди</u>. Алгебра Q со една n-арна операција [ ] се вика n-<u>групоид</u>. n-групоидот Q е n-подгрупоид од групоидот S акко $Q \subseteq S$ и $[a_1 \dots a_n] = a_1 a_2 \dots a_n$, за секои $a_1, \dots, a_n \in Q$. Со други зборови, n-подгрупоид е исто што и Δ-подалгебра, каде што Δ е определено како и во почетокот на <u>2.1</u>. За n-групоидот Q велиме дека е <u>со лево</u> (односно <u>со десно</u>) <u>кратење</u> ако го задоволува квазиидентитетот <u>2.3(1)</u> (односно 2.3.(1')); Q е n-<u>групоид со кратење</u> ако за секој $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ го задоволува квазиидентитетот

$$[x_1 \dots x_{i-1} y x_{i+1} \dots x_n] = [x_1 \dots x_{i-1} z x_{i+1} \dots x_n] \rightarrow y = z. \quad (1)$$

(Да забележиме дека секоја n-полугрупа со кратење е и n-групоид со кратење, но еден n-групоид со лево и со десно кратење не мора да е n-групоид со кратење.) Ако еден n-групоид го задоволува идентитетот <u>2.3.</u>(1), за секоја пермутација $\nu \rightarrow i_\nu$, тогаш велиме дека тој е <u>комутативен</u>; групоидот $(S;\cdot)$ се вика n-<u>комутативен</u> ако n-групоидот $(S;\cdot^{n-1})$ е комутативен.

Ќе формулираме подолу неколку резултати докажани во [39].

$\underline{1}^{\circ}$. Секој n-групоид е n-подгрупоид од некој групоид.

$\underline{2}^{\circ}$. Класата n-групоиди со лево кратење се совпаѓа со класата n-подгрупоиди од групоиди со лево кратење.

$\underline{3}^{\circ}$. n-групоидот Q е n-подгрупоид од групоид со десно кратење акко е n-групоид со десно кратење и го задоволува секој квазиидентитет од облик

$$[\underline{x}\ \underline{z}] = [\underline{y}\ \underline{z}] \rightarrow [\underline{x}\ \underline{u}] = [\underline{y}\ \underline{u}] \tag{2}$$

каде што $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ и $\underline{u}$ се низи од променливи.

$\underline{4}^{\circ}$. n-групоидот Q е n-подгрупоид од групоид со кратење акко Q е n-групоид со кратење и го задоволува секој квазиидентитет (2).

$\underline{5}^{\circ}$. За секој $n \geq 3$, постои n-квазигрупа што не е n-подгрупоид од ниедна квазигрупа.

$\underline{6}^{\circ}$. n-групоидот Q е n-подгрупоид од n-комутативен групоид акко Q е комутативен групоид.

$\underline{7}^{\circ}$. n-групоидот Q е n-подгрупоид од комутативен групоид акко во Q е точен следниов идентитет

$$[x_1 x_2 x_3 \ldots x_n] = [x_2 x_1 x_3 \ldots x_n]. \tag{3}$$

Од својствата $\underline{6}^{\circ}$ и $\underline{7}^{\circ}$ следува дека еден комутативен n-групоид е n-подгрупоид и од комутативен и од n-комутативен групоид, но тоа не значи дека секој комутативен n-групоид е n-подгрупоид од групоид што е и комутативен и n-комутативен.

Формулираните резултати се обопштени во [11;IV]. Обопштувањето се состои во тоа што наместо со групоидниот терм $x_1 x_2 \ldots x_n$ се работи со произволен групоиден терм ξ.

§3. АСОЦИЈАТИВИ

3.1. Полугрупен ред на една алгебра. Во текот на целиот овој параграф ќе претпоставуваме дека: $F \neq \emptyset$, $F_0 \cup F_1 = \emptyset$, $G = F_2 = \{\bullet\}$ и $f^{\Delta} = x_1 x_2 \ldots x_n$, за секој n-арен оператор $f \in F$. Ако $\underline{A}$ е F-алгебра, тогаш со $\underline{A}^{\Delta}$ ќе ја означуваме Δ-обвивката на $\underline{A}$ во SEM, а со $A^{\bullet}$ множеството на елементи $a^{\bullet}$ од A^{Δ}, при $a \in A$. Тогаш, за кардиналниот број $|A^{\bullet}|$ на $A^{\bullet}$ ќе велиме дека е <u>полугрупен ред</u> на $\underline{A}$; ако полугрупниот ред на $\underline{A}$ е 1, тогаш велиме дека A е <u>полугрупно сингуларна</u>. Покрај тоа, секаде во овој параграф, со J ќе биде означувано множеството броеви $\{n \mid F_{n+1} \neq \emptyset\}$, а со d најголемиот заеднички делител на броевите од J. Тврдењата што ќе ги формулираме подолу се докажани во [40].

$\underline{1}^{\circ}$. Ако алгебрата $\underline{A}$ е полугрупно сингуларна, тогаш A^{Δ} е циклична група со ред d.

$\underline{2}^{\circ}$. Ако k е ненулти кардинален број и A множество, такво што $k \le |A|$, тогаш постои алгебра со носител A и полугрупен ред k.

$\underline{3}^{\circ}$. Ако k е ненулти кардинален број тогаш секоја алгебра е подалгебра на алгебра со полугрупен ред k.

Како специјален случај од $\underline{3}^{\circ}$ се добива дека:

$\underline{3}'$. Секоја алгебра е подалгебра на полугрупно сингуларна алгебра. (Со други зборови, класата подалгебри од полугрупно сингуларни F-алгебри се совпаѓа со класата од сите F-алгебри.)

$\underline{4}^{\circ}$. Ако директниот производ од една колекција алгебри е полугрупно сингуларна алгебра, тогаш секоја алгебра од колекцијата е полугрупно сингуларна. (Директниот производ од една колекција полугрупно сингуларни алгебри не мора да е полугрупно сингуларна алгебра.)

Наместо со класата полугрупи може да се работи и со други многукратности, како, на пример, со многукратноста од сите групоиди или со многукратноста групи. Така се доаѓа до поимот за <u>групоиден</u>, односно <u>групен</u>, <u>ред</u> на дадена алгебра.

Да разгледаме една конкретна алгебра. Имено, нека $A=\{a,b,c\}$ е множество со три елементи и нека $d \in J$. Определуваме F-алгебра со носител A на следниот начин. Прво, нека n е најмалиот елемент од J, а m најмалиот елемент од J што не се дели со n. Тогаш, за секој $f \in F_m$ ставаме:

$fc^m = b$, $fa_1 \ldots a_m = a$ ако $a_\nu \neq c_\nu$ за некој ν
и $ga_1 \ldots a_k = a$ за секој $g \in F_k$ и секои $a_1,\ldots,a_k \in A$, при $k \neq m$. Тогаш, добиената алгебра има групоиден и полугрупен ред 2, но е групно сингуларна.

<u>3.2. Асоцијативи</u>. За F-алгебрата $\underline{A}$ велиме дека е <u>слаб F-асоцијатив</u> ако ги задоволува идентитетите:

$$\begin{aligned} fgx_1\ldots x_{m+n-1} &= gfx_1\ldots x_{m+n-1} \\ &= fx_1\ldots x_{i-1}gx_i\ldots x_{m+n-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

за секој n-арен оператор $f \in F$, m-арен оператор $g \in F$ и број $i \in \{2,3,\ldots,n\}$. Лесно се доаѓа до комплетниот систем идентитети на многукратноста слаби F-асоцијативи. Имено, $\xi=\eta$ е точен на секој слаб F-асоцијатив акко η може да се добие со евентуално разместување на операторите во ξ. За слабиот F-асоцијатив <u>A</u> велиме дека е F-<u>асоцијатив</u> ако го исполнува идентитетот:

$$f_1\dots f_r x_o\dots x_n = g_1\dots g_s x_o\dots x_n, \tag{2}$$

за секоја низа оператори $f_1,\dots,f_r$, $g_1,\dots,g_s \in F$, такви што:

$$f_i \in F_{n_i+1},\ g_j \in F_{m_j+1},\quad n_1+\dots+n_r=n=m_1+\dots+m_s. \tag{3}$$

Лесно се проверува дека $\xi=\eta$ е идентитет во класата F-асоцијативи акко низите променливи во ξ и η се еднакви.

Следните две својства ги карактеризираат асоцијативите и слабите асоцијативи како специјални подалгебри на полугрупи.

<u>1</u>°. Алгебрата <u>A</u> е F-асоцијатив акко постои полугрупа S и фамилија фиксни елементи $\{d^f \mid f\in F\}$ од S такви што:

(i) d^f е во центарот на S за секој $f\in F$;

(ii) за секоја низа оператори $f_1,\dots,f_r$, $g_1,\dots,g_s$ што го задоволуваат условот (3) е точно равенството

$$d^{f_1}\dots d^{f_r} = d^{g_1}\dots d^{g_s}.$$

(iii) за секој n-арен оператор $f\in F$ и низа елементи $a_1,\dots,a_n\in A$ е точно равенството $f_{\underline{A}}a_1\dots a_n = d^f a_1\dots a_n$.

<u>2</u>°. Алгебрата <u>A</u> е слаб F-асоцијатив акко постои полугрупа S и фамилија елементи $\{d^f \mid f\in F\}$ од S, такви што горните тврдења (i) и (iii) се точни.

Да забележиме дека:

<u>3</u>°. Класата F-асоцијативи се совпаѓа со класата слаби F-асоцијативи, акко $|F|=1$. Во овој случај, класата F-асоцијативи се совпаѓа со класата n-полугрупи, ако F се состои од еден n-арен оператор.

Што се однесува до полугрупните редови, слабите асоцијативи задоволуваат некои од тврдењата формулирани во претходниот дел, додека за асоцијативите, главно, тие не важат. Тоа се гледа од следните тврдења што, исто така, се докажани во [40].

<u>4</u>°. Ако $|F|\geq 2$ и ако k е кардинален број таков што $k\leq|A|$, тогаш постои слаб F-асоцијатив со носител A и полугрупен ред k.

$\underline{5}^{\circ}$. Ако $|F| \geq 2$, тогаш постои колекција полугрупно сингуларни слаби F-асоцијативи чиј директен производ не е полугрупно сингуларен слаб F-асоцијатив.

$\underline{6}^{\circ}$. Класата подалгебри од полугрупно сингуларни слаби асоцијативи е вистинска поткласа од класата слаби асоцијативи.

$\underline{7}^{\circ}$. Асоцијативот $\underline{A}$ е полугрупно сингуларен акко $|A| = 1$.

$\underline{8}^{\circ}$. Полугрупниот ред на асоцијативот $\underline{A}$ е конечен акко $\underline{A}$ е конечен.

$\underline{9}^{\circ}$. Ако асоцијативот $\underline{A}$ е бесконечен, тогаш неговиот ред се совпаѓа со полугрупниот ред.

Алгебрата од крајот на претходниот дел е пример на асоцијатив што е групно сингуларен, па значи својството $\underline{7}^{\circ}$ не важи ако се работи за групни редови.

Во работата [34] е даден комплетен опис на цикличните асоцијативи, т.е. асоцијативите што се генерирани од еден елемент. Имено, покажано е дека класата циклични асоцијативи може да се опише со помош на множеството конгруенции од адитивната полугрупа на ненегативните цели броеви.

3.3. Полугрупни асоцијативи. За алгебрата $\underline{A}$ велиме дека е полугрупна акко $\underline{A} \in^{\Delta}$ SEM.

$\underline{1}^{\circ}$. Секоја полугрупна алгебра е асоцијатив. (За натаму, наместо "полугрупна алгебра" ќе велиме "полугрупен асоцијатив".) [19]

$\underline{2}^{\circ}$. Ако A^{Δ} е полугрупната обвивка на алгебрата $\underline{A}$ и ако τ е јадрото на пресликувањето $a \mapsto a^{\bullet}$, тогаш $\underline{A}/\tau$ е полугрупен асоцијатив. Имено, τ е најмалата конгруенција на $\underline{A}$ со својството соодветната фактор-алгебра да е полугрупен асоцијатив. [19]

$\underline{3}^{\circ}$. Класата F-асоцијативи се совпаѓа со класата полугрупни F-асоцијативи акко $d \in J$, каде што J и d се определени во почетокот на 3.1. (Во овој случај, класата F-асоцијативи се сведува, во суштина, на класата n-полугрупи, каде што $n=d+1$.) [19]

$\underline{4}^{\circ}$. Ако $\underline{A}$ е сурјективен F-асоцијатив (т.е. за секој $a \in A$ постои $f \in F$ и $a_1,\dots,a_n \in A$, такви што $a=fa_1\dots a_n$), тогаш тој е полугрупен. Во тој случај постои d+1-полугрупа (A;[ ]) таква што:

$$fa_1a_2\dots a_n = [a_1a_2\dots a_n], \qquad (1)$$

за секој n-арен оператор $f \in F$. [31;3]

За F-асоцијативот A се вели дека е F-група акко (A;f) е n-група за некој n-арен оператор $f \in F$; во тој случај (A;g) е n-група за секој m-арен оператор $g \in F$.

5°. Ако A е F-група, тогаш постои d+1-група (A; [ ]) таква што (1) е точно за секој n-арен оператор $f \in F$.

За асоцијативот A се вели дека е со кратење акко (A;f) е n-полугрупа со кратење за некој n-арен оператор $f \in F$; и во овој случај се добива дека (A;g) е m-полугрупа со кратење за секој m-арен оператор $g \in F$. Работата [21] е посветена на асоцијативите со соодветни ослабени својства за кратење и е покажано дека тие асоцијативи се полугрупни. Ако се имитираат соодветните докази од [11;III], се добива дека е точно и следново тврдење:

6°. Секој асоцијатив со кратење е подасоцијатив на полугрупа со кратење. Ако A е соодветната универзална полугрупа со кратење чиј подасоцијатив е A, тогаш: A е подасоцијатив на група акко $A^{\sim}$ е потполугрупа од група.

Од 3° следува дека, за $d \notin J$, класата полугрупни F-асоцијативи е вистинска потквазимногукратност од многукратноста F-асоцијативи. Во работата [31] е даден прилично ефективен опис на систем аксиоми, во форма на квазиидентитети, на квазимногукратноста полугрупни асоцијативи. Во истата работа се докажани и други својства на полугрупните асоцијативи, и (пошироко) на асоцијативите.

Освен во неколку тривијални случаи, не ни се познати описи на класите подасоцијативи од соодветни многукратности полугрупи.

3.4. Обопштени подгрупоиди. За F-алгебрата A велиме дека е F-подгрупоид на групоидот G акко е Δ-подалгебра на G, каде што $f^{\Delta} = x_1\dots x_n$ за секој n-арен оператор $f \in F$. Во [39] е покажано дека:

1°. Класата F-подгрупоиди на групоиди е многукратноста акко $d \in J$.

$\underline{2}^{\circ}$. Со идентитетите што се последици на идентитетите од облик 3.2.(2) се исцрпува множеството идентитети што важат во класата F-подгрупоиди од групоиди.

За една F-алгебра велиме дека е слаб F-групоид, ако ги задоволува сите идентитети од обликот 3.2.(2). Во тој случај, секој терм од облик $f_1 \ldots f_r \, x_1 \ldots x_n$ ќе го означуваме со $[x_1 \ldots x_n]$. Јасно е дека секој F-подгрупоид од групоид ги задоволува сите можни квазиидентитети од облик

$$
\begin{aligned}
&[x_1 \ldots x_m] = [y_1 \ldots y_n] \rightarrow \\
&\rightarrow [x_1 \ldots x_m \, z_1 \ldots z_p] = [y_1 \ldots y_n \, z_1 \ldots z_p],
\end{aligned} \tag{1}
$$

но не ни е познато дали важи и обратното, т.е. дали секој слаб F-групоид што ги задоволува квазиидентитетите од облик (1) е F-подгрупоид од групоид.

§4. УШТЕ НЕКОЛКУ ВИДОВИ ПРОШИРУВАЊА

4.1. Обопштени потпрстени. Нека R е асоцијативен прстен и нека J,K се множества позитивни цели броеви. За $A \subseteq R$ велиме дека е (J,K)-потпрстен од R акко се точни следниве две тврдења:

(i) A е J-подгрупа од адитивната група на прстенот;

(ii) A е K-подасоцијатив на мултипликативната полугрупа на прстенот.

Опис на класата (J,K)-потпрстени од асоцијативни прстени е даден во [32], со што се обопштуваат резултатите од [18] и [30]. Не ни се познати описи од некои конкретни класи прстени.

4.2. Проширувања на тополошки алгебри. Поимот за Δ-подалгебра е осмислен и кај тополошките алгебри. Работите [25] и [38] се посветени на проширувања на тополошки алгебри. Имено, во [25] е покажано дека секоја тополошка алгебра може да се смести во тополошка полугрупа во смисла на Теоремата на Кон-Ребане, а во [38] е покажано дека ако Q е тополошка n-група тогаш нејзината универзална покривка Q^{Δ} може да се топологизира, така што да стане тополошка група, во која Q е и отворена и затворена n-подгрупа. Во работата [53] се направени неколку обиди за тополгизирање на универзалната покривка од една тополошка n-полугрупа; во истата работа се добиени и други резултати во врска со проширување на тополошки алгебри.

4.3. Проширување на алгебри на операции. Нека M е непразно множество и нека со $\Omega_n(M)$ го означиме множеството од сите n-арни операции на множеството M; според тоа, $\Omega_0(M)=M$. Ако $f \in \Omega_n(M)$, тогаш ќе пишуваме $|f| = n$. На множеството

$$\Omega(M) = \bigcup_{0}^{\infty} \Omega_n(M)$$

определуваме низа делумни операции $\{\overset{i}{+} \mid i=1,2,\ldots,\}$ со:

$$i \le |f| \Rightarrow f \overset{i}{+} g\, x_1 \ldots x_{m+n-1} = fx_1 \ldots x_{i-1} g x_i \ldots x_{m+n-1}.$$

Лесно се проверува дека се исполнети следните својства.

(i) Ако $f,g \in \Omega(M)$, $i \le |f|$ тогаш $f \overset{i}{+} g$ е единствен елемент од $\Omega(M)$ и притоа $|f \overset{i}{+} g| = |f| + |g| - 1$.

(ii) Ако $i \le |f|$, $j \le |g|$, тогаш
$$f \overset{i}{+} (g \overset{j}{+} h) = (f \overset{i}{+} g) \overset{i+j-1}{+} h.$$

(iii) Ако $j < i \le |f|$, $p = |h|$, тогаш
$$(f \overset{i}{+} g) \overset{j}{+} h = (f \overset{j}{+} h) \overset{i+p-1}{+} g.$$

Поопшто, нека Ω е унија од низата дисјунктни множества $\{\Omega_n \mid n=0,1,\ldots\}$ и нека $\{\overset{i}{+} \mid i=1,2,\ldots\}$ е низа делумни операции на Ω со својствата (i), (ii) и (iii), каде $|f|=n$ акко $f \in \Omega_n$. Тогаш велиме дека $(\Omega; \{\overset{i}{+} \mid i=1,2,\ldots\})$ е алгебра на операции. Алгебрата $\Omega(M)$ и секоја нејзина подалгебра се викаат конкретни алгебри на операции. Основниот резултат на работата [23] е дека секоја алгебра на операции е конкретна алгебра на операции. (Да забележиме дека операциите $\overset{i}{+}$ се воведени за прв пат во докторската дисертација на авторот, а алгебрите на операции како апстрактни структури во [28], каде што специјално внимание им е посветено на алгебрите на квазигрупи.)

Во [26] се добиени соодветни својства на алгебрите на мултиоперации. Во [50], исто така, се испитуваат различни видови алгебри на операции.

4.4. Квазигрупни релации. Нека Q е непразно множество, m и n позитивни цели броеви и $\rho \subseteq Q^{m+n}$. За структурата $(Q;\rho)$ велиме дека е делумна [m,n]-квазигрупа акко за било кои два "вектора" $\underline{a},\underline{b} \in Q^{m+n}$ што имаат n заеднички координати, од $\underline{a},\underline{b} \in \rho$ следува $\underline{a}=\underline{b}$. Ако, уште повеќе, за произволно избрани n координати постои единствен вектор $\underline{a}$ таков што $\underline{a} \in \rho$, тогаш велиме дека $(Q;\rho)$ е [m,n]-квазигрупа. Во [43] се докажани следниве резултати. (i) Секоја делумна [m,n]-квазигрупа е потструктура на некоја [m,n]-квазигрупа. (ii) За секоја делумна [m,n]-квазигрупа $(Q;\rho)$ постои максимална делумна [m,n]-квазигрупа $(Q;\rho')$, таква што $\rho \subseteq \rho'$. (iii) Ако $k \geq 2$ и $\rho \subseteq Q^k$, тогаш постојат m и n такви што k=m+n и $(Q;\rho)$ е делумна [m,n]-квазигрупа. Во истата работа се дадени и други карактеристики на квазигрупните релации.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Белоусов В.Д.: n-арные квазигруппы, Кишинев 1972

[2] Глускин Л.М.: Позиционые оперативы, Матем.сб. 68, 1975, 444-482

[3] Колесников О.В.: К теории n-полугрупп, ДАН УССР, А,4,1977, 302

[4] Колесников О.В.: Инверсные n-полугруппы, Гос. Унив., Харьков, 1977

[5] Мальцев А.И.: О включении асоциативных систем в группи, Мат.сб., 6,1939, 331-336

[6] Мальцев А.И.: О включении ассоциативных систем в группи II, Мат.сб., 8,1940, 251-264

[7] Мальцев А.И.: Алгебраические системы, Москва 1970

[8] Марковски С.: Сместување на n-групоиди во n-квазигрупи, Год.Збор. Матем.фак., 28, 1977, 27-31

[9] Марковски С.: За една класа полугрупи, Мат.Билтен 2 (XXVIII) 1978

[10] Марковски С.: За дистрибутивните полугрупи, Год.Збор. Матем. фак., 30, 1979

[11] Марковски С.: Подалгебри на групоиди (докторска дисертација) Скопје 1980

[12] Ребане Ю.К.: Об одном представлении произвольных универсальных алгебр в полугруппах (непубликовано)

[13] Ребане Ю.К.: О представлении универсальных алгебр в коммутативных полугруппах. Сиб.Мат.Журн. 7, 1966, 878-885

[14] Трпеновски Б.: n-полугрупи што можат да се пополнат со неутрални елементи, Билтен на Друшт. матем. и физ. Макед., XV, 1964, 23-26

[15] Ушан Я.: Ассоциативные в целим систем n-арных квазигрупп, Publications T. 19(33), 1975, 155-166

[16] Чупона Ѓ.: За асоцијативните конгруенции, Билтен, XIII, 1962, 5-12

[17] Чупона Ѓ.: Полугрупи генерирани од асоцијативи, Год.зб., 15, 1964, 5-25

[18] Чупона Ѓ.: За m,n-прстените, Билтен, XVI, 1965, 5-10

[19] Чупона Ѓ.: За асоцијативите, МАНУ, Прилози I.1, 1969, 9-20

[20] Чупона Ѓ.: Подалгебри на полугрупи, Билтен, XIX, 1969, 9-16

[21] Чупона Ѓ.: Асоцијативи со кратење, Год.Зб., 19, 1969, 5-14

[22] Чупона Ѓ.: За теоремата на Кон-Ребане, Год.Зб., 20, 1970, 5-14

[23] Чупона Ѓ.: За алгебрите на сместувања, Год.Зб., 20, 1970, 15-24

[24] Чупона Ѓ.: За квазипрстените, Билтен, XX, 1969, 19-22

[25] Чупона Ѓ.: Сместување на тополошки алгебри во тополошки полугрупи, Билтен, XXI, 1970, 37-42

[26] Чупона Ѓ.: Една класа делумни алгебри, Год.Зб., 22, 1972, 5-37

[27] Чупона Ѓ., Марковски С.: Сместување на универзални алгебри, Год.Зб., 25-26, 1976, 15-34

[28] Belousov V.D.: Balanced Identities in Algebras of Quasigroups, Aeq. math., 8, 1972, 1-73

[29] Bruck R.H.: A survey of Binary Systems, Springer-Verlag, 1958

[30] Boccioni D.: Caratterizzazione di una classe di anelli generalizati, Rend.Semin.mat.Univ.Padova, 35,1965, 116-127

[31] Celakoski N.: On semigroup associatives, MANU, Prilozi, IX, 2, 1977, 5-19

[32] Celakoski N.: On (F,G)-rings, God.Zbor. 28, 1977, 5-15

[33] Celakoski N.: On some axiom systems for n-groups, Matem. Bilten 1 (XXVII), 1977, 5-14

[34] Celakoski N.: On cyclic associatives, MANU, Prilozi I1, 1980

[35] Clifford A.H., Preston G.B.: The algebraic theory of semigroups, Amer.Math.Soc. vol. I 1964, vol. II 1967

[36] Cohn P.M.: Universal Algebra, New York 1965

[37] Čupona Ǵ.: On some primitive classes of universal algebras, Matem.Vesn. 3(18), 1966, 105-108

[38] Čupona Ǵ.: On topological n-groups, Bilten XXII,1971, 5-10

[39] Čupona Ǵ.: n-groupoids, Matem.Bilt. II (XXVIII),1978,5-11

[40] Čupona Ǵ.: On a representation of algebras in semigroups, MANU Prilozi X.1, 1978, 5-18

[41] Čupona Ǵ.: n-subsemigroups of semigroups satisfying the law $x^r = x^{r+m}$, God.Zbor. 30, 1979

[42] Čupona Ǵ., Celakoski N.: On representation of associatives into semigroups, MANU, Prilozi VI.2, 1974, 23-34

[43] Čupona Ǵ., Ušan J., Stojaković Z.: Multiquasigroups and related structures, MANU, Prilozi I2, 1980, 5-12

[44] Hosszu M.: On the explicit form of n-group operations, Publ. math. 10, 1963, 88-92

[45] Loš J.: On the extending of models (I), Fundamenta Mathematica, 42, 1955, 38-54

[46] Post E.L.: Polyadic groups, Trans.Amer.Math.Soc. 48, 1940 208-350

[47] Prešić S., Prešić M.: On the embeddingg of Ω-algebras in groupoids, Publ.Inst.Mat. 21(35), 1977, 169-174

[48] Prešić M.: Some results on the extendings of models, Algebraic conference, Skopje 1980, 23-34

[49] Radojčić M.D.: On the embedding od universal algebras in groupoid holding the law xyozuoo = xzoyuoo, Matem. Vesn. 5(20), 1968, 353-356

[50] Schein B.M., Trochimenko V.S.: Algebras of multiplace functions, Semigroup Forum, Vol.17, No 1 (1979) 1-64

[51] Tvermoes H.: Über eine verallgemeinerung des Gruppenbegriffs, Math.Scand. 1, 1953, 18-30

[52] Ušan J.: Kvazigrupe, Novi Sad 1979

[53] Žižović M.: Prilog izučavanju odnosa topoloških i algebarskih struktura (doktorska disertacija), Beograd 1980

S U M M A R Y

EXTENDINGS OF ALGEBRAIC STRUCTURES

The subject of this paper are some extendings of algebraic structures. The paper consists of the following four parts:

1. GENERALIZED SUBALGEBRAS (Preliminaries. Generalized subalgebras. Generalized subalgebras of algebras in a variety.)

2. n-SEMIGROUPS (The universal covering of an n-semigroup. n-subsemigroups of semigroups in a variety of semigroups. n-subsemigroups of cancellative semigroups. n-subgroupoids of some classes of groupoids.)

3. ASSOCIATIVES (Semigroups orders of algebras. Associatives. Semigroup associatives. Generalized subgroupoids.)

4. SOME OTHER KINDS OF EXTENDINGS OF ALGEBRAS (Generalized rings. Extendings of topological algebras. Extendings of algebras of operations. Quasigroup relations.)

Almost all the results stated in the paper are already published and there are not any proofs given in this paper.