Год, збор. Матем, фак.
30 (15—27) 1979

ЗА ДИСТРИБУТИВНИТЕ ПОЛУГРУПИ

С. Марковски

Во работава се разгледува многукратноста $\mathcal{D}^e$ од леводистрибутивните, како и многукратноста $\mathcal{D}$ од дистрибутивните полугрупи, определени со (0.1) односно со (0.1) и (0.2). За секоја од овие многукратности се определува комплетниот систем идентитети, а исто така се опишуваат слободните полугрупи во $\mathcal{D}^e$. Се покажува дека класата $\mathcal{D}_n^e$ на n-потполугрупи од $\mathcal{D}^e$-полугрупи не е многукратност, но дека класата $\mathcal{D}_n$ од n-потполугрупи на $\mathcal{D}$-полугрупи е многукратност.

0. Увод. За една полугрупа $S(\cdot)$ велиме дека е *леводистрибутивна* ако

$$xyz = xzxz, \tag{0.1}$$

деснодистрибутивна акко

$$xyz = xzyz, \tag{0.2}$$

и *дистрибутивна* ако во S важат (0.1) и (0.2), за кои било x, y, $z \in S$.

Многукратноста леводистрибутивни (деснодистибутивни, дистрибутивни) полугрупи ја означуваме со $\mathcal{D}^e$ ($\mathcal{D}^r$, $\mathcal{D}$). Во оваа работа ќе дадеме опис на комплетниот систем идентитети во $\mathcal{D}^e$ и $\mathcal{D}$, а со тоа соодветно и на слободните полугрупи во овие многукратности. Исто така ќе се задржиме на проблемот дали класата n-потполугрупи на полугрупи во $\mathcal{D}^e$ ($\mathcal{D}^r$, $\mathcal{D}$) е многукратност, при што ќе покажеме дека одговорот за $\mathcal{D}^e$ ($\mathcal{D}^r$) е негативен, а за $\mathcal{D}$ е позитивен. Притоа, под *n-полугрупа* $A[\ldots]$ ќе подразбираме алгебра со една $n+1$-арна операција $[\ldots]$, таква што за секои $x_0, \ldots, x_{2n} \in A$

$$[[x_0 \ldots x_n]\, x_{n+1} \ldots x_{2n}] = [x_0 [x_1 \ldots x_{n+1}]\, x_{n+2}, \ldots x_{2n}] = \ldots = [x_0 \ldots x_{n-1} [x_n \ldots x_{2n}]]. \tag{0.3}$$

Поради (0.3) секоја n-полугрупа $A[\ldots]$ можеме да ја сметаме за kn-полугрупа ($k \geqslant 1$), ставајќи за секои $x_0, \ldots, x_{kn} \in A$,

$$[x_0 \ldots x_{kn}] = [\ldots[[x_0 \ldots x_n] \ldots, x_{2n}] \ldots x_{kn}].$$

За n-полугрупата $A[\ldots]$ велиме дека е *n-подполугрупа од полугрупата* $S(\cdot)$ акко $A \subseteq R$ и за секои $x_0, \ldots, x_n \in A$

$$(0.4) \qquad [x_0 \ldots x_n] = x_0 \ldots x_n.$$

1. Идентитети во $\mathcal{D}^e$. Ќе дадеме опис на комплетниот систем идентитети во многукратноста $\mathcal{D}^e$, користејќи го поимот за редуциран терм. Притоа, термите во овој дел ќе сметаме дека се во јазикот на бинарниот оператор ″.″ и ќе ги обележуваме со $\xi, \eta, \ldots$, а $\xi[x_1, \ldots, x_k]$ означува дека во термот ξ не се јавуваат други променливи освен $x_1, \ldots, x_k$.

За термите од облик

(1.1) $x,\ x^2,\ x^3,$

(1.2) $x_1 x_2 \ldots x_r,\ \ x_1^2 x_2 \ldots x_r,\ \ x_1 \ldots x_{r-1} x_r^2,\ \ x_1^2 x_2 \ldots x_{r-1} x_r^2,$

(1.3) $x_1 x_2 \ldots x_r x_j,\ \ x_1^2 x_1 \ldots x_r x_j,\ j = 1, 2, \ldots, r-1,$

каде $r \geqslant 2$, велиме дека се *редуцирани терми* во $\mathcal{D}^e$.

Теорема 1.1. (*i*) Ако ξ и η се два редуцирани терми, тогаш $\xi = \eta$ е идентитет во $\mathcal{D}^e$ ако ξ и η се графички еднакви.

(*ii*) За секој терм ξ постои редуциран терм ξ^r, таков што $\xi = \xi^r$ е идентитет во $\mathcal{D}^r$. (За ξ^r велиме дека е *редуциран претставник* на ξ.)

(*iii*) Постои алгоритамска постапка за добивање на редуцираните преставници.

Доказ: Ги уочуваме следниве законитости при примената на (0.1):

1) Ако ξ е терм со должина помала од 3, тогаш (0.1) не може да се примени врз ξ;

2) Ако врз ξ може да се примени (0.1) тогаш првото, второто и последното појавување на променлива во тој терм не се менува;

3) Со примената на (0.1) бројот на различните променливи во еден терм не се менува;

4) Ако во термот ξ пред првото појавување на променливата x_j се јавуваат променливите $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}$, тогаш и по примената на (0.1) врз ξ пред x_j се јавуваат истите променливи;

5) $x(y\ldots)x(\ldots z) = x(y\ldots)(\ldots z)$ и $(\ldots x)y^2(z\ldots) = (\ldots x)y(z\ldots)$ се идентитети во $\mathcal{D}^e$.

Врз основа на 1) — 5) уочуваме дека за доказ на (i) доволно е да се покаже дека во $\mathcal{D}^e$ не се идентитети следниве формули:

$$x_1 \ldots x_{r-1}\, x_r = x_1 \ldots x_{r-1}\, x_r^2,\quad x_1^2 x_2 \ldots x_{r-1}\, x_r = x_1^2\, x_2 \ldots x_{r-1}\, x_r^2.$$

Меѓутоа, со примената на (0.1) врз терми од облик $\xi = \eta\, x$, каде x не се јавува во η, повторно се добива терм од облик $\zeta\, x$, каде x не се јавува во ζ.

Користејќи го претходното, редуцираниот претставник ξ^r на даден терм ξ се добива со примена на следниов алгоритам;

1^0. Секој поттерм на ξ од облик $x\,\eta\, x\,\zeta$ се заменува со терм од облик $x\,\eta\,\zeta$.

2^0. Секој поттерм на ξ од облик $xy^2 z$ се заменува со термот xyz.

Со тоа се докажани тврдењата (ii) и (iii). ∎

Од Т. 1.1. веднаш следува и описот на комплетниот систем идентитети на $\mathcal{D}^e$, бидејќи за два терма ξ и η имаме дека $\xi = \eta$ е идентитет во $\mathcal{D}^e$ ако ξ и η имаат исти редуцирани претставници. Исто така оттука следува и описот на слободните леводистрибутивни полугрупи. Имено, нека $A \neq \emptyset$ е дадено множеството, а F е множеството од сите конечни низи од елементи на A. На секоја низа $u \in F$ и придружуваме редуциран претставник u^r, работејќи со истиот алгоритам како во Т. 1.1 Во множеството редуцирани низи $S \subseteq F$ воведуваме операција $\bullet$ со: $u^r \bullet v^r = (u^r\, v^r)^r$, при што $u^r\, v^r$ ја означува конкатенацијата (составувањето) на низите u^r и v^r. Добиената структура $S\ (\bullet)$ е слободната леводистрибутивна полугрупа генерирана над множеството A.

Според (1.1) — (1.3) ја добиваме

Теорема 1.2. Ако A е множеството со m елементи, тогаш слободната леводистрибутивна полугрупа генерирана од A има

$$3m + 2 \sum_{r=2}^{m} \binom{m}{r} (r+1)! \tag{1.4}$$

елементи. ∎

Бидејќи постапката за добивање на редуцираните претставници е алгоритамска, важи

Теорема 1.3. Во секоја слободна леводистрибутивна полугрупа, генерирана над конечно множество, проблемот на зборови е решен. ∎

2. n-потполугрупи од леводистрибутивни полугрупи. Нека $A\ [\ldots]$ е n-полугрупа ($n \geqslant 2$) и да земеме дека $A\ [\ldots]$ е n-потполугрупа од една леводистрибутивна полугрупа S. Се договараме, ако ξ е терм во јазикот „$\cdot$“, при што должината (т е. бројот на сите појавувања на променливи) на ξ, во ознака $|\xi|$, е добра за n (односно $|\xi| = kn+1$ за некој k), со $[\xi]$ да го означуваме термот во јазикот „$[\ldots]$" добиен од ξ со користење на (0.4). Така добиваме дека во случајот кога $A\ [\ldots]$ е n-потполугрупа од полугрупа тогаш во $A[\ldots]$ се точни сите идентитети од множеството $\Lambda = \{[\zeta]=[\eta] \mid \zeta=\eta$ е идентитет во $\mathcal{D}^e$, $|\xi| \equiv |\eta| \equiv 1 \pmod n\}$.

Со $\mathcal{D}^e(n)$ ја означуваме многукратноста од n-полугрупи определена со множеството идентитети Λ, за која велиме дека е многукратноста од леводистрибутивни n-полугрупи. Користејќи ја Т. 1.1 ќе дадеме опис на комплетниот систем идентитети во $\mathcal{D}^e(n)$, од когошто веднаш ќе добиеме и опис на слободните леводистрибутивни n-полугрупи.

Под редуциран терм во $\mathcal{D}^e(n)$ ќе подразбираме кој било терм од следниве облици:

(2.1) $x_0 = [x_0]$, $[x_0^{n+1}]$, $[x_0^n\, x_1], [x_0\, x_1^n]$,

$[x_0^2\ x_1^3]$ (кога $n=2$), $[x_0^2\, x_1^{n-1}]$ (кога $n \geqslant 3$),

(2.2) $[x_0^2\, x_1^r\, x_2 \ldots x_{kn-r}]$, за $0 \leqslant r \leqslant n,\ kn-r \geqslant 2$.

(2.3) $[x_0\ x_1^{r+1}\, x_2 \ldots x_{kn-r}]$, за $0 \leqslant r < n,\ kn-r \geqslant 2$,

(2.4) $[x_0\ x_1^r x_2 \ldots x_{kn-r-1}\, x_{kn-r}^2]$, за $1 \leqslant r \leqslant n,\ kn-r \geqslant 2$,

(2.5) $[x_0^2\ x_1^{r-1}\, x_2 \ldots x_{kn-r-1}\, x_{kn-r}^2]$, за $2 \leqslant r \leqslant n+1,\ kn-r \geqslant 2$.

(2.6) $[x_0\ x_1^r\ x_2 \ldots x_{kn-r}\ x_j]$, за $1 \leqslant r \leqslant n,\ kn-r \geqslant 1,\ 0 \leqslant j <$
$< kn-r$.

(2.7) $[x_0^2\ x_1^{r-1}\ x_2 \ldots x_{kn-r}\ x_j]$, за $2 \leqslant r \leqslant n+1,\ kn-r \geqslant 1$,
$0 \leqslant j < kn-r$.

Важи следнава

Теорема 2.1. (*i*) Ако $[\xi]$ и $[\eta]$ се два различни редуцирани терми тогаш $[\xi]=[\eta]$ не е идентитет во $\mathcal{D}^e(n)$.

(*ii*) За секој терм $[\xi]$ постои еднозначно определен редуциран терм $[\xi]^r$, таков што $[\zeta]=[\xi]^r$ е идентитет во $\mathcal{D}^e(n)$. (За $[\zeta]^r$ велиме дека е редуциран претставник на $[\xi]$.)

(*iii*) Постои алгоритамска постапка за добивање редуцирани претставници.

Доказ: За добивање на редуцираните претставнипи ја користиме алгоритамската постапнка опишана во Т.1.1, на следниов начин: ако е даден терм $[\xi]$ тогаш постои редуциран претставник ξ^r за термот ξ, и затоа ставаме

$$\xi^r = x_0 \Rightarrow [\xi]^r = [x_0] = x_0$$

$$\xi^r = x_0^3 \Rightarrow [\xi]^r = [x_0^{n+1}]$$

$$\xi^r = x_0^2\, x_1 \Rightarrow [\xi]^r = [x_0^n\, x_1]$$

$$\xi^r = x_0\, x_1^2 \Rightarrow [\xi]^r = [x_0\, x_1^n]$$

$$\xi^r = x_0^2\, x_1^2 \Rightarrow [\xi]^r = [x_0^2\, x_1^3] \text{ (кога } n = 2),$$

$$[\xi]^r = [x_0^2\, x_1^{n-1}] \text{ (кога } n = 3),$$

$$\xi^r = x_0 \ldots x_{kn-r} \Rightarrow [\xi]^r = [x_0\, x_1{}^{r+1}\, x_2 \ldots x_{kn-r}],$$

$$\text{при } kn\text{-}r \geqslant 2,\ 0 \leqslant r < n,$$

итн., за сите други преостанати случаи (1.1)—(1.3). ■

Од Т. 2.1. следува и описот на комплетниот систем идентитэти во $\mathcal{D}^e(n)$, односно $[\xi] = [\eta]$ е едентитет во $\mathcal{D}^e(n)$ ако $[\xi]$ и $[\eta]$ имаат исти редуцирани претставници. Уште повеќе, добиваме дека $[\xi] = [\eta]$ е идентитет во $\mathcal{D}^e(n)$ ако ξ и η имаат исти редуцирани претставиипи во $\mathcal{D}^e$. Оттука се добива и описот на слободните леводистрибутивни n-полугрупи. Имено, нека $A \neq \emptyset$ е дадено множество, F е множеството од сите низи со должина $kn + 1$ (со елементи од A), а S е подмножеството на F што се состои од сите редуцирани низи при редукцијата од Т. 1.2. т.е. ако $u \in F$, $u^r \in S$. Во S дефинираме $n + 1$-арна операција $\{\ldots\}$ со: $\{u_0^r \ldots u_n^r\} = (u_0 \ldots u_n)^r$, при што добиваме дека $S\{\ldots\}$ е слободната леводистрибутивна n-полугрупа генерирана над A.

И во овој случај важат теореми аналогни на Т. 1.2 и Т. 1. 3, односно ако A е конечно множество, тогаш проблемот на зборови е решен во слободната леводистрибутивна n-полугрупа генерирана над A. Во случај кога $n = 2$, т.е. кога работиме со тернарни полугрупи, ако A има m елементи тогаш од (2.1)—(2.7) следува дека слободната леводистрибутивна тернарна полугрупа има

$$5m^2 - 3m + 2 \sum_{k=2}^{p} \binom{m}{2k} (2k+1)! + 2 \sum_{k=2}^{q} \binom{m}{2k-1} (2k)!$$

елементи, каде $p = \left[\dfrac{m}{2}\right]$, $q = \left[\dfrac{m+1}{2}\right]$ ($[x]$ е цел дел од x).

До крајот на овој дел ќе се задржиме на доказот дека класата $\mathcal{D}_n^e$ од n-потполугрупи на леводистрибутивните полугрупи не е многукратност, односно дека $\mathcal{D}^e(n) \supset \mathcal{D}_n^e$. За таа цел, претходно, со неколку својства, ќе покажеме дека е доволно да се задржиме на тернарниот случај ($n=2$).

Теорема 2.2. (i) Нека $A[\ldots]$ е леводистрибутивна тернарна полугрупа. Над множеството A дефинираме $n+1$-арна операција ($n \geqslant 3$) $[\ldots]'$ со

$$(2.8)\qquad [a_0 \ldots a_n]' = \begin{cases}[a_0 \ldots a_n], \text{ ако } n=2k\\ [a_0 a_1^2\, a_2\ \ldots a_n], \text{ ако } n=2k+1.\end{cases}$$

На тој начин добиваме леводистрибутивна n-полугрупа $A\ [\ldots]'$.

(ii) Нека $A\ [.,.]'$ е леводистрибутивна n-полугрупа. Над множеството A дефинираме тернарна операција $[\ldots]''$ со

$$(2.9)\qquad [abc]'' = [ab^{n-1}\,c]'.$$

На тој начин добиваме леводистрибутивна тернарна полугрупа $A[\ldots]''$.

(iii) Ако $A[\ldots]$ е тернарна леводисрибутивна полугрупа, $A[..-]'$ е добиена со (2.8), а $A\ [\ldots]''$ д добиена со (2.9), тогаш тернарните полугрупи $A[\ldots]$ и $A[\ldots]''$ се исти, т.е. $[abc]=[abc]''$ за секои $a,\ b,\ c \in A$.

Доказ: (i) Ако $n=2k$ јасно е дека операцијата $[\ldots]$ е полугрупна. Затоа, нека $n=2k+1$ и $a_0, \ldots, a_{2n} \in A$. Имаме:

$$[[a_0 \ldots a_n]'\, a_{n+1} \ldots a_{2n}]' = [a_0\, a_1^2\, a^2 \ldots a_n\, a_{n+1}^2\ \ a_{n+2}, \ldots a_{2n}] = [a_0 \ldots a_{2n}],$$

а слично се добива и

$$[a_0 \ldots a_{i-1}\ [a_i \ldots\ a_{n+i}]'\ a_{n+i+1} \ldots\ a_{2n}]' = [a_0 \ldots\ a_{2n}].$$

Значи, $A[\ldots]'$ е n-полугрупа.

Нека $\xi=\eta$ е идентитет во $\mathcal{D}^e$, каде ξ и η се со добра должина за операцијата $[\ldots]'$ и нека ξ_1 и η_1 се добиени од ξ и η кога променливите ќе се заменат со елементи от A. Ако $n=2k$ тогаш $[\xi_1]=[\eta_1]$ е точно во $A[\ldots]$ (бидејќи $[\xi]=[\eta]$ е идентитет во $\mathcal{D}^e(2)$) па според (2.8) имаме $[\xi_1]'=[\eta_1]'$, односно $A\ [\ldots,]' \in \mathcal{D}^e\ (2k)$.

Да земеме $n=2k+1$. Ако $a,\ b,\ c, \ldots,\ d \in A$ и $\xi_1 = a^h\, b^s\, c^f \ldots d^t$, $\eta_1 = a^r\, b^p\, c^z \ldots\ d^e$, тогаш според (2.8) имаме

$$[a^h b^{s+1} c^f \ldots d^t] = [a^r b^{p+1} c^q \ldots d^e] \Rightarrow [\xi_1]' = [\eta_1]',$$

при што, секако, $h + s + f_+ \ldots + t \equiv r + p + q_+ \ldots + e \equiv 1$ $(mod\ n)$.

(ii) Работиме како и во (i).

(iii) Ако $a, b, c \in A$, при $n = 2k$ имаме $[abc]'' = [ab^{n-1} c]' = [ab^{n-1} c] = [abc]$, а при $n = 2k + 1$ имаме: $[abc]'' = [ab^n c]' = [ab^n c] = [abc]$. ∎

Теорема 2.3. Нека A [, . .] е тернарна леводистрибутивна полугрупа, $A[\ldots]'$ е n-полугрупата определена со (2.8) и S е леводистрибутивна полугрупа. Тогаш A [. . .] е тернарна потполугрупа од S *akko* A [. . .]′ е n-потполугрупа од S.

Доказ: Нека $A \subseteq S$ и за некои $a, b, c \in A$ имаме $[abc] = abc$. Тогаш за $a_0, \ldots, a_{2k+1} \in A$ имаме

$[a_0 \ldots a_{1k}] = a_0 \ldots a_{2k}$, $[a_0 a_1^2\ a_2 \ldots a_{2k+1}] = a_0\ a_1^2\ a_2 \ldots\ a_{2h+1} = a_0 \ldots a_{2k+1}$,

па според (2.8) се добива $[a_9 \ldots\ a_n]' = a_0 \ldots\ a_n$.

Ако, пак, A [. . .]′ е n-потполугрупа од S тогаш за секои $a_0, \ldots, a_n \in A$ имаме $[a_0 \ldots a_n]' = a_0 \ldots a_n$, па затоа според (2.9), ако $a, b, c \in A$,

$$[abc]'' = [ab^{n-1}\ c]' = ab^{n-1}\ c = abc.$$

Со тоа добиваме дека A [. . .] $= A$ [. .]″ е тернарна потполугрупа од S. ∎

Ќе конструираме тернарна леводистрибутивна полугрупа A [. . .] којашто не може да се смести во леводистибутивна полугрупа. Од Т. 2·3 ќе следува дека и леводистрибутивната n-полугрупа B [. . .]′ добиена со помош на (2.8) исто така не може да се смести во леводистрибутивна полугрупа.

Прво ја уочуваме следнава лема:

Лема 2.4. Во секоја тернарна потполугрупа од леводистрибутивна полугрупа е исполнет квазидентитетот

(2.10) $$[xyz] = [uyv] \Rightarrow [yxz] = [yuv].$$

Доказ: Ако $[xyz] = [uyv]$ тогаш од $xyz = uyv$ се добива $yxz = yxyz = yuyv = yuv$, па затоа $[yxz] = [yuv]$. ∎

Да ја означиме со B слободната леводистрибутивна тернарна полугрупа генерирана над множеството $M=\{a, b, c, d, f\}$, во којашто важи релацијата

$$abc = dbf. \tag{2.11}$$

За неа го имаме следново својство:

Лема 2.5. Тернарната леводистрибутвна полугрупа B не е тернарна потполугрупа на леводстрибутивна полугрупа.

Доказ: Според $L.2.4.$ доволно е да докажеме дека во B не е точна релацијата $bac = bdf$. За таа цел го бараме обликот на сите низи w со непарна должина над M, такви што во B да важи равенството $w = bac$. Ќе докажаме дека важи импликацијата

$$w = bac \Rightarrow w = bau, \tag{2.12}$$

каде u е некоја низа со непарна должина над M, од што веднаш ќе следува тврдењето на лемата. Доказот на (2.12) се изведува со наоѓањето на сите елементи од B коишто се еднакви со bac.

Ако врз bac се примени неколку пати (0.1) тврдењето (2.12) е точно. Притоа се добива

$$bac = bab^{k_1} b^{k_2} a^{k_3} \dots b^{k_n} c. \tag{2.13}$$

каде $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ е парен број, $k_1, \dots, k_n \geqslant 0$. Сега, примената на (2.11) врз (2.13) дава

$$bac = ba\, a^{k_1} \dots b^{k_{n-2}}\, abc = ba\, a^{k_1} \dots b^{k_{n-2}}\, dbf, \tag{2.14}$$

каде $k_1 + \dots + k_{n-2}$ е парен број.

Со повторна примена на (0.1) или (2.11) врз (2.14) добиваме дека повторно важи тврдењето (2.12). од што и следува својството искажано во лемата. ∎

Од сето досега изложено следува точноста на

Теорема 2.6. Класата $\mathcal{D}_n^e$ од сите n-потполугрупи на леводистрибутивни полугрупи не е многукратност, односно $\mathcal{D}_n^e \subset \mathcal{D}^e(n)$. ∎

3. Дистрибутивни полугрупи и нивни n-потполугрупи. Сите претходни резултати можат дуално да се пренесат и на деснодистрибутивните полугрупи. Овде ќе извршиме соодветна анализа на многукратноста дистрибутивни полугрупи $\mathcal{D}$.

Многукратноста ентропични полугрупи $\mathcal{E}$ е определена со

(3.1) $$xyzu = xzyu.$$

Теорема 3. 1. $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$.

Доказ: Од $xyzu = xyzyu = xzyzyu = xzyzu = xzyu$ имаме $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$, а бидејќи слободната полугрупа генерирана од елементот a е ентропична и не е дистрибутивна, се добива $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$.

За многукратноста $\mathcal{E}$ ја имаме следнава

Лема 3.2. Ако $\xi = \xi[x_0, \ldots, x_n]$ е терм (во „·"), при што првата променлива во ξ е x_0, а последната е x_n, тогаш

$$\xi = x_0^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

е идентитет во $\mathcal{E}$. Ако, пак, x_0 е првата и последната променлива во ξ тогаш

$$\xi = x_0^{k_0 - 1} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} x_0$$

е идентитет во $\mathcal{E}$. (Притоа претпоставуваме дека x_i се јавува k_i пати во ξ.) ∎

Под **редуциран терм во** $\mathcal{D}$ подразбираме терм од следниве облици (при што сметаме дека множеството променливи е $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$):

$$x,\ x^2,\ x^3,\ x^2 y,\ x\, x_{i_1} \ldots x_{i_r}\, y\ (r \geqslant 0),\ x x_{i_1} \ldots\ x_{i_r} x\ (r \geqslant 1),$$

при што земаме $x \neq y$, $x, y \notin \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\}$ и $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$.

Користејќи ги резултатите од Т. 1.1 за леводистрибутивните (како и дуалните резултати за деснодистрибутивните) полугрупи, Т. 3.1 и Л. 3.2, ја добиваме точноста на

Теорема 3.3. За секој терм ξ еднозначно е определен редуциран терм ξ^r во $\mathcal{D}$, таков што $\xi = \xi^r$ е идентитет во $\mathcal{D}$. Притоа, постапката за добивање на термот ξ^r е алгоритамска. ∎

Одбележуваме дека важат соодветни својства аналогни на оние од првиот дел, но понатаму ќе се задржиме на испитување само на n-потполугрупите од дистрибутивните полугрупи.

Со $\mathcal{D}(n)$ ја означуваме многукратноста n-полугрупи чии идентитети се определени на следниов начин: Ако ξ и η се терми (во

„.“) со добра должина за $n+1$-арната операција $[\ldots]$, тогаш $[\zeta]=$ $=[\eta]$ е идентитет во $\mathcal{D}(n)$ ако $\xi=\eta$ е идентитет во $\mathcal{D}$. За $\mathcal{D}(n)$ велиме дека е многукратноста дистрибутивни n-полугрупи.

Теорема 3.4. $[\xi]=[\eta]$ е идентитет во $\mathcal{D}(n)$ ако во ξ и η се јавуваат исти променливи, при што првите и последните променливи во ξ и η се исти.

Доказ: Ако во ξ и η прва променлива е x_0, последна е x_k, а $x_0, \ldots, x_k$ се променливите што се јавуваат во ξ и η, тогаш $\zeta=$ $=x_0^p\, x_1 \ldots x_k$, $\eta=x_0^p\, x_1 \ldots x_k$ се идентитети во $\mathcal{D}$ за некој $p \geqslant 1$.

Обратното тврдење следува од Т. 3.3. ∎

Бидејќи и за дистрибутивните полугрупи важат теоремите Т. 2.2 и Т. 2.3, кога во нивната формулација на место зборовите “леводистрибутивна“ се стават “дистрибутивна“, заклучуваме дека при испитувањето на n-потполугрупите од дистрибутивните полугрупи доволно е да се задржиме на тернарниот случај.

Теорема 3.5. Секоја дистрибутивна тернарна полугрупа е тернарна потполугрупа од дистрибутивна полугрупа.

Доказ: Нека $A\,[\ldots]$ е дистрибутивна тернарна полугрупа. Со F ја означуваме слободната дистрибутивна полугрупа генериранана од A, при што уочуваме дека $A \subseteq F$. Во F дефинираме релација τ со

$$(3.2) \qquad [a_0 \ldots a_{2k}]=a \text{ во } A\,[\ldots] \Rightarrow uav\ \tau\ ua_0 \ldots a_{2k}\, v,$$

каде u, $v \in F$ или u (v) е празната низа. Транзитивниот производ β на релациите τ и τ^{-1} е конгруенција во F.

Фактор-полугрупата $S=F/\beta$ е дистрибутивна полугрупа, па за доказ на теоремата доволно е да уочиме дека пресликувањето $\varphi: A \to S$, определено со $\varphi(a)=a^{\beta}$ е инјекција. Имено, ако φ е инекција, од $[abc]=d$ во $A\,[\ldots]$ ќе имаме $d\ \tau\ abc$, од каде што се добива $[abc]^{\beta}=a^{\beta}\, b^{\beta}\, c^{\beta}$, па $A\,[\ldots]$ може да се смета за тернарна потполугрупа од S.

Затоа нека a, $b \in A$ и $a\ \beta\ b$, т. е.

$$(3.3) \qquad a\gamma\ u_1\ \gamma\ u_2\ \gamma \ldots \gamma\ u_k\ \gamma\ b,$$

каде што $u_1, \ldots, u_k \in F$, $\gamma=\tau \cup \tau^{-1}$.

Со користење на Т. 3.4 се докажуваат следниве тврдења:

(i) $a \in A, \ \imath \gamma u \Rightarrow a \tau u$ или $a = u$.

(ii) $a, b \in A, \ a \tau b \Rightarrow a = b$.

(iii) $a \in A, \ a \tau u \tau v \Rightarrow a \tau v$.

(iv) Нека $a \tau u$, $v \tau u$, каде $a \in A$. Тогаш

(iv. 1) $v \in A \Rightarrow a = v$:

(iv. 2) $d, c \in A, \ v = dc \Rightarrow \{(\exists\, w \in F)\ (a \tau u, \ v \tau u, \ v \tau w, \ a \tau w)$

каде што w е некој елемент од низата (3.3)$\}$;

(iv. 3) ако должината на v е поголема од 2 тогаш $a \tau v$.

Ќе го докажеме само (iv. 2); па нека $d, c \in A$ и $v = dc$. Од $a \tau u$, $v \tau u$ имаме: $a = [a_0 \ldots a_{2k}]$, $u = a_0 \ldots a_{2k} = b_0 \ldots b_{2s+1}$ (каде a_ν, $b_\lambda \in A$) и притоа $c = b_{2s+1}$, $d = [b_0 \ldots b_{2s}]$ (или, пак, $c = [b_1 \ldots \ldots b_{2s+1}]$, $d = b_0$). Бидејќи $v = dc$, според Т. 3.3 имаме дека низата (3.3) не може да биде од облик $a \tau u \tau^{-1} \tau^{-1} \ldots$ Значи, за некој $w \in F$, низата (3.3) е од облик $a \tau u \tau^{-1} v \tau w \ldots$. Сега имаме две можности:

Прво, ако $d = [d_0 \ldots d_{2n}]$, $w = d_0 \ldots d_{2n} c$ тогаш $[d_0 \ldots d_{2n} c^2] = [[d_0 \ldots d_{2n}] c^2] = [dc^2] = [[b_0 \ldots b_{2s}] b_{2s+1}^2] = [b_0 \ldots b_{2s} b_{2s+1}^2] = [a_0 \ldots \ldots a_{2k}] = a$, па $a \tau w$

Второ, ако $c = [c_0 \ldots c_{2p}]$, $w = dc_0 \ldots c_{2p}$, тогаш $[d^2 c_0 \ldots c_{2p}] = [d^2 [c_0 \ldots c_{2p}]] = [d^2 c] = [dc^2] = a$, па повторно $a \tau w$.

(Случајот $c = [b_1 \ldots b_{2s+1}]$, $d = b_0$, се разгледува како и погоре.)

Сега, од (i), (ii) и (iv) согледуваме дека низата (3.3) може да се редуцира до облик $a \tau b$, а од (ii) во тој случај следува $a = b$. Со тоа е докажано дака пресликувањето φ е инекција. ∎

Бидејќи секоја n-потполугрупа од дистрибутивна полугрупа припаѓа на $\mathcal{D}(n)$, од Т. 3.5 и дискусијата пред неа ја добиваме точноста на следнава

Теорема 3.6. Класата $\mathcal{D}_n$ од n-потполугрупи на дистрибутивните полугрупи е еднаква со многукратноста $\mathcal{D}(n)$.

На крајот да истакнеме дека идејата за теоремата Т. 2.2 е земена од работата [1], во која се разгледуваат слични проблеми како и во оваа работа, но за други класи полугрупи.

L I T E R A T U R A

[1] Ǵ. Čupona, n-subsemigroups of semigroups satisfying the law $x^r = x^{r+m}$, Год. зборн. Матем. фак. 30 (1979) 5-14·

[2] С. Марковски, За една класа полугрупи, Математички Билтен, 2 (28), 1978, Скопје.

S. Markovski

ON DISTRIBUTIVE SEMIGROUPS

Summary

1. A semigroup S is said to be left (right) distributive iff it satisfies the following law:

$$xyz = xyxz \qquad (xyz = xzyz),$$

and S is distributive if it is both left and right distributive.

Let $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ be an infinite set of individual variables. *A* semigroup polynominal is said to be reduced if it has one of the following forms:

(1) $x_i,\ x_i^2,\ x_i^3,$

(2) $x_{i_1} \ldots x_{i_r},\ x_{i_1}^2\ x_{i_2} \ldots x_{i_r},\ x_{i_1} \ldots x_{i_{r-1}}\ x_{i_r}^2,\ x_{i_1}^2\ x_{i_2} \ldots x_{i_{r-1}}\ x_{i_r}^2,$

(3) $x_{i_1} \ldots x_{i_r}\ x_{i_j},\ x_{i_1}^2\ x_{i_2} \ldots x_{i_r}\ x_{i_j}.\ j = 1, 2, \ldots, r\text{-}1,$

where $r \geqslant 2$, *and* $\nu \neq \lambda \Rightarrow i_\nu \neq i_\lambda$.

Theorem 1.1. If ξ is a semigroup polynomial, then there is a unique reduced semigroup polynomial ξ^r (obtained from ξ by an algorithm procedure) such that $\xi = \xi^r$ is an identity in the class of left distributive semigroups.

Theorem 1.2. Let $A \neq \varnothing$ be a set, F_A be the set of all finite sequences on A and $S_A = \{u^r \mid U \in F_A\}$ be the set of all reduced sequences according to the algorithm in Theorem 1.1. If the operation $\bullet$ in S_A is defined by $u^r \bullet v^r = (uv)^r$, then $S_A(\bullet)$ is the free left distributive semigroup, freely generated by A.

Theorem 1.3. If the set A is finite with m elemets, then:

(i) S_A has $3\mathrm{m} + 2 \sum\limits_{r=2}^{m} \binom{m}{r}\ (r+1)!$ elements;

(ii) the word problem is decidet in S_A.

2. *A* universal algebra $A\ [\ldots]$ with an $n+1$ ary operation $[\ldots]$ is called an n-semigroup iff for all $a_0, \ldots, a_{2n} \in B$

$$[[a_0 \ldots a_n]\ a_{n+1} \ldots a_{2n}] = [a_0 \ldots a_{i-1}\ [a_i \ldots a_{n+i}]\ a_{n+i+1} \ldots a_{2n}]$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$. In that case $A\ [\ldots]$ is a kn-semigroup too $(k \geqslant 1)$.

An n-semigroup $A\,[\ldots]$ is called an n-snbsemigroup of the semigroup S iff $A \subseteq S$ and for all $a_0, \ldots, a_n \in A$

$$[a_0 \ldots a_n] = a_0 \ldots a_n.$$

Theorem 2.1. The class $\mathcal{D}_n^e$ of n-subsemigroups of the left distributifve semigroups is not a variety.

Prof: 1, Let ξ be a semigroup polynomial with $kn+1$ variables ($|\xi| = kn+1$). Denote by $[\xi]$ the n-semigroup polynomial obtained from ξ in a usual manner, and let $\mathcal{D}^e$ (n) se the variety of the so called left distributive n-semigronps, defined by the set of laws $\{[\xi] = [\eta] \mid |\xi| \equiv |\eta| \equiv 1 \ (mod\ n),\ \xi^r = \eta^r\}$. Then $\mathcal{D}_n^e \subseteq \mathcal{D}^e\,(n)$.

2) Let $A\,[\ldots] \in \mathcal{D}_n$ and the ternary operation $[\ldots]'$ in A be defined by

$$[abc]' = [ab^{n-1}\,c]\ (a,\ b,\ c \in A).$$

Then $A\,[\ldots] \in \mathcal{D}_2$. If the $n+1$-ary operation $[\ldots]''$ in A is defined by

$$[a_0 \ldots a_n]'' = \begin{cases} [a_0 \ldots a_n]',\ n = 2p \\ [a_0\ a_1^2\ a_2 \ldots a_n]',\ n = 2p+1 \end{cases} \qquad (a_0, \ldots, a_n \in A)$$

then $A\,[\ldots]'' \in \mathcal{D}_n$ and $[a_0 \ldots a_n] = [a_0 \ldots a_n]''$.

Thus, $A\,[\ldots] \in \mathcal{D}_n$ iff $A\,[\ldots]' \in \mathcal{D}_2$.

3) The following quasiidentity in a ternary semigroup in $\mathcal{D}_2$ is satisfied: $[xyz] = [uyv] \Rightarrow [yxz] = [yuv]$.

4) Let $B\,[\ldots]$ be the free left distributive ternary semigroup genarated by the set $\{a, b, c, d, f\}$ with the relation $[abc] = [dbf]$.
It can be shown that $[bac] \neq [bdf]$, and so $B\,[\ldots] \notin \mathcal{D}_2^e$.

Theorem 2.2. The class $\mathcal{D}_n$ of n-subsemigroups of the distributive semigroups is a variety, i. e. $\mathcal{D}_n$ is defined by the set of identities $\{[\xi] = [\eta] \mid |\xi| \equiv |\eta| \equiv 1$ $(mod\ n)$, $\xi = \eta$ is an identity in the variety of distributive semigroups$\}$.