Год. збор. Матем. фак.
28 (33—37) 1978

ЗА $[m, n]$ — КВАЗИГРУПИТЕ

Кирил Стојменовски

Во оваа работа се воведува поимот за $[m, n]$-квазигрупа, каде што $m \geqslant n$. За $n = 1$ овој поим се сведува на поимот m-квазигрупа. Се покажува дека на секоја квазигрупа можат да ѝ се придружат инверзни операции кои (во општ случај) не се квазигрупни операции. Се покажува дека постојат нетривијални $[m, n]$-квазигрупи, но и дека соответниот појам за $[m, n]$-лупа не е од интерес бидејќи постојат само едноелементни $[m, n]$-лупи. На крајот на работата се разгледува поимот за изотопија на $[m, n]$-квазигрупи.

1. Нека Q е непразно множество и A пресликување од Q^m во Q^n, каде $m, n \in N$ и $m \geqslant n$. Пресликувањето A се вика векторска операција или мултиоперација на Q.

Ќе воведеме некои вообичаени ознаки. Низата $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_s$ елементи од Q кратко ќе ја означуваме со x_k^s или $\{x_i\}_{i=k}^s$, при што ако $s < k$ ќе сметаме дека е празна низа, а за $k = s$ пишуваме само x_k. Низат $\underbrace{a, a, \ldots, a}_{\text{к-пати}}$ ќе ја означуваме со a^k.

Ако на $a_1^m \in Q^m$ со пресликувањето $A: Q^m \to Q^n$ му одговара $b_1^n \in Q^n$, означуваме $A(a_1^m) = b_1^n$.

Векторската операција A на множеството Q е $[m, n]$-квазигрупа ако равенката

$$A(a_1^{k-1}\ x_1^n\ a_{k+n}^m) = b_1^n$$

има единствено решение за секое $a_1^{k-1}\ a_{k+n}^n \in Q^{m-n}$, $b_1^n \in Q^n$ и секој $k = 1, 2, \ldots, m-n+1$.

Можеме да забележиме дека дадената дефиниција за $n = 1$, се сведува на дефиницијата за m-арна квазигрупа, а за $n = 1$ и $m = 2$ на бинарна квазигрупа.

Пример. Ако на множеството $Q = \{a, b\}$ дефинираме $[3, 2]$-операција со:

$$A = \begin{pmatrix} aaa & aab & aba & abb & bbb & bba & bab & baa \\ ab & aa & ba & bb & ab & aa & ba & bb \end{pmatrix}$$

добиваме $[3, 2]$-квазигрупа.

2. Нека низата $a_1^m \in Q^m$ кратко ја означиме со $\bar{a}$ додека низата $a_1^{k-1}\, a_{k+n}^m$ со $_k(\bar{a})$.

Пресликувањето $L_{k(\bar{a})} : Q^n \to Q^n$ определено со равенката

$$L_{k(\bar{a})}(x_1^n) = A\,(a_1^{k-1}\, x_1^n\, a_{k+n}^m),\ k = 1, 2, \ldots, m-n+1, \tag{1}$$

каде $Q(A)$ е $[m, n]$-вказигрупа се вика k-та транслација на $[m, n]$—квазигрупата $Q\,(A)$, определена со елементот $a_1^m \in Q^m$.

Од дефиницијата за $[m, n]$-квазигрупа следува дека транслациите $L_{k(\bar{a})}$ се пермутации на множеството Q^n. Очигледно е да важи и обратно.

Ако A е $[m, n]$ — операција на Q и ако пресликувањата определени со равенката (1) се пермутации на Q^n за секој $\bar{a} \in Q^m$ и секој $k = 1, 2, \ldots, m-n+1$, тогаш $Q\,(A)$ е $[m, n]$ — квазигрупа.

3. Ако $Q\,(A)$ е $[m, n]$-квазигрупа, за фиксирано k, $1 \leqslant k \leqslant m-n+1$, на секој $a_1^{k-1} a_{k+n}^m\, b_1^n \in Q^m$ еднозначно е определен $c_1^n \in Q^n$ како решение на равенката $A\,(a_1^{k-1}\, x_1^n\, a_{k+n}^m) = b_1^n$. Според тоа, на множеството Q добиваме нова $[m, n]$ операција $A^{(k)}$ -определено со:

$$A^{(k)}\,(a_1^{k-1}\, b_1^n\, a_{k+n}^m) = c_1^n \iff A\,(a_1^{k-1}\, c_1^n\, a_{k+n}^m) = b_1^n$$

Операцијата $A^{(k)}$ ја викаме k-та обратна (инверзна) операција на $[m, n]$-квазигрупата $Q\,(A)$, $k = 1, 2, \ldots, m-n+1$.

Пример. Нека $Q\,(A)$ $[3, 2]$-квазигрупа, определена во **1**, тогаш

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} aba & baa & bba & abb & aab & bbb & bab & aaa \\ aa & ab & ba & bb & aa & ab & ba & bb \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} aab & aaa & baa & abb & bbb & bba & aba & abb \\ aa & ab & ba & bb & aa & ab & ba & bb \end{pmatrix}$$

Можеме за забележиме дека инверзните операции $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ не се квазигрупи на $Q = \{a, b\}$.

Од изнесеното следува дека со $[m, n]$-квазигрупата $Q\,(A)$ е определена една алгебра $Q\,(A, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(m-n+1)})$, каде што $A^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, m-n+1$, се инверзните операции на $Q\,(A)$.

Во оваа алгебра се исполнети равенствата:

$$A\,(a_1^{k-1}\, A^{(k)}\,(a_1^{k-1}\, b_1^n\, a_{k+n}^m)\, a_{k+n}^m) = b_1^n \tag{2}$$

$$A^{(k)}\,(a_1^{k-1}\, A\,(a_1^{k-1}\, b_1^n\, a_{k+n}^m)\, a_{k+n}^m) = b_1^n \tag{2'}$$

за $k = 1, 2, \ldots, m-n+1$

Важи и обратното. Ако во алгебрата $Q(A, A^{(1)}, \ldots, A^{(m-n+1)})$ каде $A, A^{(1)}, \ldots A^{(m-n+1)}$ се $[m, n]$-операции, се исполнети равенката (2) и (2') тогаш $Q(A)$ е $[m, n]$-квазигрупа.

Навистина, од равенството (2) следува дека равенката

$A(a_1^{k-1}\, x_1^n\, a_{k+n}^m) = b_1^n$ има решение $x_1^n = A^{(k)}(a_1^{k-1}\, b_1^n\, a_{k+n}^m)$.

Нека уште y_1^n е решение на таа равенка. Од равенството (2') следува:

$$x_1^n = A^{(k)}(a_1^{k-1}\, b_1^n\, a_{k+n}^m) = A^{(k)}(a_1^{k-1}\, A(a_1^{k-1}\, y_1^n\, a_{k+n}^m)\, a_{k+n}^m) = y_1^n$$

што значи дека тоа решение е единствено.

4. Елементот $e \in Q$ се вика единичен елемент на $[m, n]$-квазигрупата $Q(A)$ ако е исполнето:

$$A(e^{k-1}\, x_1^n\, e^{m-n-k+1}) = x_1^n$$

за секој $x_1^n \in Q^n$ и секој $k = 1, 2, \ldots, m-n+1$.

Ако $[m, n]$-квазигрупата има единичен елемент тогаш таа ја викаме $[m, n]$-лупа.

Ќе покажеме дека: Ако $Q(A)$ е $[m, n]$-лупа и $m > n \geqslant 2$, тогаш таа е тривијална т.е. $|Q| = 1$.

Нека $e \in Q$ е единичен елемент на $[m, n]$-лупата $Q(A), n \geqslant 2$. Според тоа:

$$A(e^{k-1}\, x_1^n\, e^{m-n-k+1}) = x_1^n$$

секоја за $x_1^n \in Q^n$; за $x_1 = e$ добиваме:

$$A(e^{k-1}\, e x_2^n\, e^{m-n-k+1}) = (e, x_2, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Од друга страна, според дефиницијата за единичен елемент е исполнето:

$$A(e^{k-1}\, e x_2^n\, e^{m-n-k+1}) = A(e^k\, x_2^n\, e e^{m-n-k}) = (x_2, x_3, \ldots, x_n\, e). \tag{3'}$$

Од равенките (3) и (3') следува:

$(e, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n\, e)$, т. е. $x_1 = e, x_2 = e, \ldots, x_n = e$.

Што значи дека $Q = \{e\}$.

5. Поимот за изотопија во теоријата на квазигрупите е доста значаен. Кај $[m, n]$-квазигрупите тој поим ќе го определиме на следниот начин.

Нека $Q(A)$ и $Q(B)$ се $[m, n]$-квазигрупи (m, n фиксирани).

3*

Велиме дека $Q(B)$ е изотоп на $Q(A)$ ако постои низа (α_1^m, β_1^n) пермутации на множетсото Q, така што биде исполнето равенството:

$$B(x_1^m) = \{\beta_j^{-1} A_j(\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^m\}_{j=1}^n$$

за секој $x_1^m \in Q$, каде што $A_j(x_1^m)$ е ознака за y_j ако $A(x_1^m) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Низата пермутации $T = (\alpha_1^m, \beta_1^n)$ се вика изотопија на $[m, n]$-квазигрупите $Q(A)$ во $Q(B)$. Ако изотопијата е од облик $T = (\alpha^{m+n}\ )$каде α е пермутација на Q тогаш $[m, n]$-квазигрупите $Q(A)$ и $Q(B)$ се изоморфни.

Ќе покажеме дека: Ако $[m, n]$-групоидот $Q(B)$ е изотоп на $[m, n]$-квазигрупата $Q(A)$, тогаш $Q(B)$ е $[m, n]$-квазигрупа.

Навистина, нека

$$B(x_1^m) = \{\beta_j^{-1} A_j\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^m\}_{j=1}^n.$$

Ќе покажеме дека равенката

$$B(a_1^{k-1}\ x_1^n\ a_{k+n}^m) = b_1^n \tag{4}$$

има решение за секој $a_1^{k-1}\, a_{k+n}^m \in Q^{m-n}$ и секој $k = 1, 2, \ldots, m-n+1$.

Ако $c_1^n \in Q^m$ е решението на равенката

$$A(\{\alpha_i a_i\}_{i=1}^{k-1}\ y_1^n\ \{\alpha_i a_i)\}_{i=k+n}^m) = \{\beta_j b_j\}_{j=1}^n,$$

тогаш

$$B(a_1^{k-1}\{\alpha_{k+i-1}^{-1} c_i\}_{i=1}^n\ a_{k+n}^m) = \{\beta_j^{-1} A_j(\{\alpha_i a_i\}_{i=1}^{k-1}\ c_1^n\ \{\alpha_i a_i\}_{i=k+n}^m)\} =$$

$$= \{\beta_j^{-1}\beta_j b_j\}_{j=1}^n = b_1^n$$

што значи дека $\{\alpha_{k+i-1}^{-1} c_i\}_{i=1}^n \in Q^n$ е решение на рвенката (4).

Нека

$$B(a_1^{k-1}\, g_1^n\, a_{k+n}^m) = B(a_1^{k-1}\, h_1^n\, a_{k+n}^m),\ g_1^n, h_1^n \in Q^n;$$

тогаш

$$A_j(\{\alpha_i a_i\}_{i=1}^{k-1}\{\alpha_{k+i-1} g_i\}_{i=1}^n\{\alpha_i a_i\}_{i=k+n}^m) =$$

$$= A_j(\{\alpha_i a_i\}_{i=1}^{k-1}\{\alpha_{k+i-1} h_i\}_{i=1}^n\{\alpha_i g_i\}_{i=k+n}^m),$$

односно

$$A(\{\alpha_i a_i\}_{i=1}^{k-1}\{\alpha_{k+1-1} g_i\}_{i=1}^n\{\alpha_i a_i\}_{i=k+n}^m) =$$

$$= A(\{\alpha_i a_i\}_{i=1}^n\{\alpha_{k+i-1} h_i\}_{i=1}^n\{\alpha_i a_i\}_{i=k+n}^n),$$

од каде што добиваме

$$\{\alpha_{k+i-1} g_i\}_{i=1}^n = \{\alpha_{k+1-i} h_i\}_{i=1}^n$$

односно $g_1^n = h_1^n$, т.е. решението на равенката (4) е единствено.

Да забележиме дека производ на изотопи е изотопија, како и инверзија на изотопија е изотопија. Според тоа: Множеството на сите изотопии на една $[m, n]$-квазигрупа е група.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Белоусов, n-арные квазигруппы, Кишинев, 1972

Kiril Stojmenovski

ON $[m, n]$ QÚASIGROUPS

(Summary)

Let Q be a set and m, n positive integers such that $m > n$.

If

$$A : x_1 \dots x_m \to Ax_1 \dots x_m = y_1 \dots y_n$$

is a mapping from Q^m into Q^n then $Q(A)$ is said to be an $[m, n]$-groupoid. And $Q(A)$ is an $[m, n]$-quasigroup if for each $k \in \{1, \dots, m - n + 1\}$ and every sequence $a_1, \dots, a_m \in Q$ the following equation is uniquely solvable in Q^n:

$$Aa_1, \dots, a_{k-1}\, x_1 \dots x_n\, a_{k+n} \dots a_m = a_k \dots a_{k+n-1}$$

Then we write.

$$A^{(k)}\, a_1 \dots a_m = x_1 \dots x_n$$

and say that $A^{(k)}$ is an inverse operation of A. Thus we obtain an algebra $Q(AA^{(1)}A^{(2)}, \dots A^{(m-n+1)})$ which satisfies the following identity equations.

$$Aa_1 \dots a_{k-1}\, A^{(k)}\, a_1 \dots a_{k-1}\, b_1 \dots b_n\, a_{k+n} \dots a_m\, a_{n+n} \dots a_m = b_1 \dots b_n \quad (2)$$

$$A^{(k)}\, a_1 \dots a_{k-1}\, Aa_1 \dots a_{k-1}\, b_1 \dots b_n\, a_{k+n} \dots a_m\, a_{k+n} \dots a_m = b_1 \dots b_n \quad (2')$$

Conversely, if $Q(A, A^{(1)}, \dots, A^{(m+n-1)})$ is an algebra such that (2) and (2') are identity equationes for each $k \in \{1, \dots, m - n + 1\}$, then $Q(A)$ is an $[m, n]$ — quasigroup.

Exemple: Jf $Q = \{a, b\}$, and A is defined by:

$$A = \begin{pmatrix} aaa & aab & aba & abb & bbb & bba & bab & baa \\ ab & aa & ba & bb & ab & aa & ba & bb \end{pmatrix}$$

the $Q(A)$ is $[3, 2]$ — quasigroup, and if $A^{(1)}$ and $A^{(2)}$ are the corresponding inverse operations the $Q(A^{(1)}$ i, $Q(A^{(2)})$ are not $[3, 2]$ — quasigroups.

An $[m,n]$ — quasigroup $Q(A)$ is said to be an $[m, n]$ — loop if there is an element $e \in Q$. Such that:

$$A\underbrace{e \dots e}_{k-1}x_1 \dots x_n\underbrace{e \dots e}_{m-n-k+1} = x_1 \dots x_n \quad (3)$$

is an identity equation for each $k \in \{1, \dots, m-n+1\}$.

It can be shown that (if $m > n > 1$) non trivial $[m, n]$ — loops do not exist.

The notion of isotopy in the class of $[m, n]$ — quasigroups is defined in a similar manner, and it is shown that this class is closed under the isotopy operation.