АДИТИВНИ ПОЛУГРУПИ НА ЦЕЛИ БРОЕВИ

Дончо ДИМОВСКИ

Во овој труд се разгледуваат адитивните полугрупи на цели броеви, при што посебно внимание им се обрнува на адитивните полугрупи од природни броеви. Трудот е поделен на два дела.

Во првиот дел е дадена структурата на адитивните полугрупи од цели броеви. Се покажува дека ако G е адитивна полугрупа од природни броеви и d е најголемиот заеднички делител на елементите од G, тогаш постои број $c \in \mathbf{N}$, така што $G_* = \{td \mid t \geqslant c,\ t \in \mathbf{N}\} \subseteq G$.

Во вториот дел се разгледани конгруенциите на адитивните полугрупи од природни броеви. Се покажува дека ако G е адитивна полугрупа од природни броеви, тогаш секоја конгруенција на G е детерминирана со една карактеристика, која во некои случаи детерминира и конечно многу други конгруенции.

1. СТРУКТУРА НА АДИТИВНИТЕ ПОЛУГРУПИ ОД ЦЕЛИ БРОЕВИ

Адитивна полугрупа од цели броеви може да биде составена од: нулата; и поголеми и помали броеви од нулата; само броеви помали од нулата; само броеви поголеми од нулата; само непозитивни броеви: само ненегативни броеви.

Т 1. 1. Секоја адитивна полугрупа G со позитивни и негативни броеви е група и постои некој број m, така што:

$$G = \{mt \mid t \in \mathbf{Z}\}.$$

Доказ. Нека m е најмалиот позитивен, а $-n$ најголемиот негативен број од G. Ако $m > n$, тогаш $0 < m-n < m$. Ако е $m < n$, тогаш $-n < m-n < 0$. Останува да биде $m = n$. Бидејќи $0,\ m,\ -m \in G$, следува дека $\{tm \mid t \in \mathbf{Z}\} \subseteq G$. Нека $u \in G$. Тогаш е $|u| > m$ и $u = t_1 m + r_u$ за $0 \leqslant r_u < m$. Од $-t_1 m \in G$ следува дека $u - t_1 m = r_u \in G$, па значи дека е $r_u = 0$. Покажавме дека $G = \{tm \mid t \in \mathbf{Z}\}$. G е група бидејќи има нула и секој елемент tm има спротивен $-tm$. □

Структурата на полугрупите само со негативни броеви е иста со структурата на полугрупите само со позитивни броеви, бидејќи ако G е полугрупа само со негативни броеви, таа е изоморфна со полугрупата составена само од спротивните броеви на броевите од G, а таа полугрупа е само од позитивни броеви.

Т. 1. 2. Нека G е полугрупа само од позитивни броеви. Нека биде n најмалиот број во G, d најголемиот заеднички делител на елементите од G и $n = kd$. Да го означиме со A_i множеството на оние елементи од G што при делењето со n даваат остаток id, т. е. $A_i = \{a \mid a \in G, a = tn + id, t \in \mathbf{N}\}$. Тогаш имаме:

(i) $G = A_0 \cup A_1 \cup \ldots\ldots \cup A_{k-1}$, дисјунктна унија.

(ii) Постојат $1 = a_0, a_1, \ldots\ldots, a_{k-1}$, такви што $A_i = \{tn + id \mid t \geqslant a_i\}$ и притоа:

$$a_i + a_j \geqslant \begin{cases} a_{i+j} & \text{за } i + j < k \\ a_{i+j-k} - 1 & \text{за } i + j \geqslant k. \end{cases}$$

(iii) Ако е $m_i = a_i n + id$, тогаш $\{n = m_0, m_1, \ldots, m_{k-1}\}$ е генераторно множество на G.

(iv) Нека биде $b = max\{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$, $s = max\{i \mid a_i = b\}$ и $c = (b-1)\,k + s + 1$. Тогаш $(c-1)\,d \notin G$ и $\{td \mid t \geqslant c\} = G_* \subseteq G$. (За G_* велиме дека е *регуларен* дел на G).

Доказ. (i) Ако $g \in G$ и $g = qn + r$ каде што $r < n$, тогаш $d \mid r$, т. е. $r = id$ и $i < k$. Значи $g \in A_i$.

(ii) Нека биде $S = \{i \mid 0 \leqslant i < k, (\exists\, m \in G)\ m = qn + id\}$. Од $n \in G$ следува дека $0 \in S$, па значи $S \neq \varnothing$. Ако $i, j \in S$ тогаш $i \dotplus j$, дефинирано на следниов начин:

$$i \dotplus j = \begin{cases} i + j & i + j < k \\ i + j - k & i + j \geqslant k \end{cases}$$

припаѓа на S, бидејќи G е полугрупа. Од ова следува дека S е потполугрупа од $\mathbf{Z}_k(+)$. Најголемиот заеднички делител на елементите од S е 1, па постојат l_i, $t_i \in \mathbf{N}^\circ$, така што е $1 = \sum_{i \in S}(-l_i) \cdot i + \sum_{i \in S} t_i \cdot i$.

Значи постои $j \in S$, така што $j + 1 \in S$. Нека биде u најмалиот од S за кој $u + 1 \in S$. Постои $t \in \mathbf{N}$ за кој $tu \leqslant k < (t+1)\,u$, т. е. $(t+1)\,u = k + l$ за $0 < l \leqslant u$. Од tu, $u + 1 \in S$ следува дека $l + 1 = (t+1)\,u + 1 \in S$. Добивме дека $l = u$, т. е. $tu = k$.

Ако е $t = 1$, тогаш $k + 1 = 1 \in S$. Ако $t \neq 1$, тогаш $(t-1)\,u$, $u + 1 \in S$, па $(t-1)\,u + u + 1 = 1 \in S$. Покажавме дека $1 \in S$, па значи $S = \mathbf{Z}_k(+)$, т. е. $S = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Со оваа дискусија покажавме дека $A_i \neq \emptyset$ за секое $0 \leqslant i < k$. Нека е a_i најмалиот за кој $a_i n + id \in A_i$. Од $n \in A_0$ следува дека $a_0 = 1$. Тврдењето следува од тоа што $a_i n + id \in G$ и $(\forall t \in \mathbf{N})\ tn \in G$.

За $i + j < k$, $(a_i + a_j)\,n + (i + j)\,d \in A_{i+j}$, па значи: $a_i + a_j \geqslant a_{i+j}$.

Нека биде $i+j \geqslant k$. Од $i, j < k$ следува дека е $i+j < 2k$, т. е. $i+j = k+s$, каде што $s < k$ и $s = i+j-k$. Од $(a_i + a_j)n + (i+j)d = (a_i + a_j + 1)n + sd \in A_s$ следува дека $a_i + a_j \geqslant a_{i+j-k} - 1$.

(iii) Нека $g \in G = A_0 \cup \ldots . \cup A_{k-1}$. Тогаш $g \in A_i$ за некое i, т. е. $g = tn + id$, при што $t \geqslant a_i$, па $g = (t - a_i)n + m_i = (t - a_i)m_0 + m_i$.

(iv) Од дефиницијата на b следува дека $b = a_s$ за некое s. $(c-1)\ d = [(b-1)\ k + s]\ d = (a_s - 1)\ n + sd \notin A_s \Rightarrow (c-1)d \notin G$. За $s + 1 + t < k$, имаме $a_{s+1+t} < a_s$, па $a_s - 1 \geqslant a_{s+1+t}$.

Значи $(a_s - 1)n + (s + 1 + t)\ d \in G$, т. е. $(c+t)\ d \in G$.

Нека $s + 1 + t \geqslant k$, т. е. $s + 1 + t = uk + l$ за $u \geqslant 1$ и $0 \leqslant l < k$. Од $(c+t)d = [(b-1)k + s + 1 + t]d = [(b-1)k + uk]\ d + ld = (b - 1 + u)n + ld$ и од $b - 1 + u \geqslant b \geqslant a_l$ следува дека $(c+t)d \in G$ □.

Структурата на полугрупите само со ненегативни (непозитивни) броеви во ништо битно не се разликува од структурата на полугрупите само со позитивни (негативни) броеви.

Да забележиме дека (iii) и (iv) од **Т. 1. 2.** ги опфаќаат соодветните резултати докажани во работата [3].

2. КОНГРУЕНЦИИ НА АДИТИВНИ ПОЛУГРУПИ ОД ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Ако е α конгруенција на полугрупата G и $m \in G$, за m^α ќе велиме дека е бесконечна (конечна) класа ако m^α е бесконечно (конечно) како множество.

Нека биде G полугрупа само со позитивни цели броеви. Ќе ги користиме ознаките од **Т. 1. 2.**

Т. 2. 1. Нека биде α конгруенција на G и $\alpha \neq \Delta_G$. (Δ_G е равенството на G). Тогаш постојат $m, s_0, s_1, \ldots, s_{k-1} \in \mathbf{N}$, такви што:

(i) $a \alpha b \Rightarrow m \mid a - b$;

(ii) $(\forall t \in \mathbf{N}^\circ)\ [(s_i + t)\ n + id]^\alpha$ е бесконечна класа и $(\forall v \in A_i) v < s_i n + id \Rightarrow v^\alpha$ е конечна класа, при што е $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

(iii) Броевите s_i го задоволуваат следниов услов:

$$s_i \geqslant a_i$$

$$s_i + a_j \geqslant \begin{cases} s_{i+j} & i+j < k \\ s_{i+j-k} - 1 & i+j \geqslant k. \end{cases} \qquad (*)$$

Доказ: (i) Нека биде $S = \{a - b \mid a,\ b \in G,\ a \alpha b\}$. Нека $u, v \in S$. Тогаш $u = a - b$, $v = u_1 - b_1$, каде што $a \alpha b$ и $b_1 \alpha u_1$. Бидејќи α е конгруенција, следува дека $a + u_1 \alpha b + b_1$. Значи $u + v \in S$, т. е. S е полугрупа. Во S има и позитивни и негативни броеви, па според **Т. 1. 1.** постои $m \in \mathbf{N}$, таков што $S = \{mt \mid t \in \mathbf{Z}\}$. Значи ако $a \alpha b$, тогаш m е делител на $\alpha - b$.

(*ii*) Бидејќи $\alpha \neq \Delta_G$, постојат $a \neq b$ и $a \alpha b$. Нека е $a < b$, т. е. $b - a = t_1 d$ за некој $t_1 \in \mathbf{N}$. Постои $t \in \mathbf{N}$, таков што $tt_1 > c$, од каде што следува дека $t(b-a) = tt_1 d \in G_* \subseteq G$. Од $a \alpha b$ следува дека $ta \alpha tb$. За секој $l \in \mathbf{N}$ имаме $lt(b-a) \in G$ и $lt(b-a) \alpha lt(b-a)$. Од $ta\alpha tb$ и $lt(b-a) \alpha lt(b-a)$ следува дека $[ltb-(l-1)ta] \alpha [(l+1)tb - lta]$, па според тоа $(ta)^\alpha$ е бесконечна класа. За секој i постои $u_i \in G_*$, таков што $ta + u_i \in A_i$ и $(ta + u_i)^\alpha$ е бесконечна класа. Нека е s_i најмалиот број за кој $s_i n + id \in A_i$ и $(s_i n + id)^\alpha$ е бесконечна класа. За секој $t \in \mathbf{N}$ имаме $tn \in G$ и $tn \alpha tn$. Следува дека $[(s_i + t)n + id]^\alpha$ е бесконечна класа. За $v < s_i n + id$ и $v \in A_i$ се добива дека v^α е конечна класа според претпоставката за s_i.

(*iii*) Од $(s_i n + id) \in A_i$ следува дека е $s_i \geqslant a_i$. За $i + j < k$ имаме дека $(s_i + a_j)n + (i+j)d \in A_{i+j}$ и $[(s_i + a_j)n + (i+j)d]^\alpha$ е бесконечна класа, па значи: $s_i + \alpha_j \geqslant s_{i+j}$. ∎

Нека биде $i + j \geqslant k$, т. е. $i + j = k + l$ за $0 \leqslant l < k$. Тогаш $(s_i + a_j)n + (i+j)d = (s_i + a_j + 1)n + ld \in A_l$ и $[(s_i + a_j)n + (i+j)d]^\alpha$ е бесконечна класа, па значи $s_i + a_j + 1 \geqslant s_l$, т. е. $s_i + a_j \geqslant s_{i+j-k} - 1$. □

Конечната низа $(m, s_0, \ldots, s_{k-1}) = (m, s_i)$ ќе ја наречеме *карактеристика* на конгруенцијата α или ќе велиме дека α *има карактеристика* (m, s_i).

Ќе воведеме некои ознаки кои ќе ги користиме понатаму. Нека е $Bs_i = \{u \mid u \in A_i \ u \geqslant s_i n + id\}$, $B(s_i) = Bs_0 \cup \ldots \cup Bs_{k-1}$ и $B^\circ = G \setminus B(s_i)$.

Т. 2. 2. (*i*) За секоја низа (m, s_i) со условот (*) постои конгруенција на G, за која (m, s_i) е карактеристика.

(*ii*) Ако $k > 1$, постои низа (m, s_i) со условот (*), која е карактеристика на повеќе од една конгруенција.

Доказ: (*i*) Ќе дефинираме релација α на G со: за секој $u \in B^\circ$, $u^\alpha = \{u\}$ и за секој $u \in B(s_i)$, $u^\alpha = \{v \mid v \in B(s_i),\ m \mid u - v\}$. Според дефиницијата на α и тоа што (s_i) го задоволува условот (*), со тривијална проверка се покажува дека α е конгруенција и има карактеристика точно (m, s_i).

(*ii*) Нека биде q најмалиот во $G \setminus A_0$. Ќе дефинираме две релации α_1 и α_2 на G со:

$n^{\alpha_1} = \{n\}$, $q^{\alpha_1} = \{q\}$ и за секој $p \in G$, $p \neq n$ и $p \neq q$, $p^{\alpha_1} = G \setminus \{n, q\}$.

$n^{\alpha_2} = q^{\alpha_2} = \{n, q\}$ и за секој $p \in G$, $p \neq n$, $p \neq q$, $p^{\alpha_2} = G \setminus \{n, q\}$.

По дефиницијата α_1 и α_2 се еквивалентности. Од тоа што n и q не можат да се претстават како збир на елементи од G следува дека α_1 и α_2 се конгруенции. Нека $q \in A_l$ за $0 < l < k$. Карактеристика и за α_1 и за α_2 е $(1, 1, a_1, \ldots, a_{l-1}, a_{l+1}, a_{l+1}, \ldots, a_{k-1})$, но $\alpha_1 \neq \alpha_2$. □

Со $\overset{m}{K_{(s_i)}}$ ќе го означиме множеството конгруенции на G кои имаат карактеристика (m, s_i).

П. 2. 3. За секоја низа (m, s_i) со условот (*), $\overset{m}{K_{(s_i)}}$ е конечно множество. □

$K^{m}_{(s_i)}$ е конечно множество бидејќи конгруенциите од него се разликуваат само во конечните класи, кои се дефинирани над конечното множество B°.

П. 2. 4. Ако $m \in G$, тогаш $|\overset{m}{K_{(s_i)}}| = 1$ за секоја низа (s_i) со условот (*).

Доказ: Во $K^{m}_{(Si)}$ е α дефинирана како во **Т. 2. 3.** (i). Ако $\beta \in K^{m}_{(Si)}$ и $\alpha \neq \beta$, тогаш би требало да постојат $a, b \in B^{\circ}$, $a \neq b$ и $a\alpha b$. Нека биде $a < b$ и $a\alpha b$. Од $a\alpha b$ следува дека $m \mid a-b$, т. е. $b = a + tm$. За секој $l \in \mathbf{N}$ имаме $ltm \in G$ и $ltm\,\beta\, ltm$, па се добива дека $a\beta(a+tm)\beta(a+ltm)$, т. е. a^{β} е бесконечна класа, што е спротивност со претпоставката β да има карактеристика (m, s_i). □

П. 2. 5. За полугрупата $G = A_0$, т. е. кога $d \in G$ имаме: α е конгруенција на G, $\alpha \neq \Delta G$ ако и само ако постојат $m, s \in \mathbf{N}$, такви што: $(u < sd \Rightarrow u^{\alpha} = \{u\})$ и $(u\alpha v \Leftrightarrow u,\ v \geqslant sd$ и $md \mid u-v)$. □

П. 2. 6. M е конечна циклична полугрупа ако и само ако M е изоморфна со $\mathbf{N}/\alpha(+)$, каде што α е конгруенција на $\mathbf{N}(+)$. □

Нека биде G полугрупа од позитивни цели броеви што ја содржи и нулата, т. е. нека е $G = G_1 \cup \{0\}$, каде што G_1 е полугрупа само со позитивни цели броеви. Нека е α конгруенција на G. Да дефинираме α_1 на G_1 со: $a\alpha_1 b \Leftrightarrow a\alpha b$. α_1 е конгруенција на G_1, и има карактеристика (m, s_i). Ќе велиме дека и α има карактеристика (m, s_i).

П. 2. 7. Нека бидат G, G_1, α, α_1 како погоре. Тогаш:

(i) $0^{\alpha} = \{0\} \Leftrightarrow \alpha = \alpha_1 \cup \{(0,0)\}$.

(ii) $0^{\alpha} \neq \{0\} \Rightarrow \{0\}^{\alpha}$ е бесконечна класа и секоја конечна класа има само еден елемент.

Доказ: (i) е јасно.

(ii) $0^{\alpha} \neq \{0\} \Rightarrow (\exists\, a \in G_1)\ 0\,\alpha\, a$.

$0\alpha a$ и $ta\,\alpha\, ta \Rightarrow \{ta \mid t \in \mathbf{N}^0\} \subseteq 0^{\alpha}$.

Нека $u \in G$, $v \neq u$ и $v \in u^{\alpha}$.

$u\alpha v$ и $0\alpha ta \Rightarrow \{v + ta \mid t \in \mathbf{N}^0\} \subseteq u^{\alpha}$.

Значи u^{α} е бесконечна класа. □

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ѓ. Чуйона, Б. Трйеновски,* Предавање по алгебра, книга II, Скопје 1973

[2] *А. Клиффорд, Г. Престон,* Алгебраическая теория полугрупп, Москва 1972. (Превод од англиски).

[3] *N. Sit, Y. William, S. M. Keung,* On the Subsemigroups of **N**, Math. Mag 1975, 48, № 4. 225-227.

SUMMARY

SEMIGROUPS OF INTEGERS WITH ADDITION

Dončo DIMOVSKI

The main results of this paper are the following:

T. 1. 2. Let G be a semigroup consisting of positive integers. Let n be the smallest integer in G, d the greatest common divisor of the elements of G and $n=kd$. Let us denote by A_i the set of those elements od G whose remainder after division by n is id, i. e. $A_i = \{a \mid a \in G,\ a = nt + id,\ t \in \mathbf{N}\}$. Then:

(*i*) $G = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1}$, the union is disjoint.

(*ii*) There exist $a_0=1, a_1, \ldots, a_{k-1}$, such that $A_i = \{tn + id \mid t \geqslant a_i\}$ and

$$a_i + a_j \geqslant \begin{cases} a_{i+j} & , \quad i+j<k \\ a_{i+j-k}-1, & i+j \geqslant k. \end{cases}$$

(*iii*) If $m_i = a_i n + id$, then $\{m_0 = n, m_1, \ldots, m_{k-1}\}$ is a set of generators for G.

(*iv*) Let $b = \max\{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$, $s = \max\{i \mid a_i = b\}$ and $c = (b-1)k + s + 1$. Then $(c-1)d \notin G$ and $\{td \mid t \geqslant c\} = G_* \subseteq G$. (We say that G_* is the *regular part* of G). □

Let G be a semigroup consisting of positive integers. We use the notation from **T. 1. 2.**

T. 2. 1. Let α be a congruence on G and $\alpha \neq \Delta_G$ (Δ_G is the equality on G). Then there exist $m, s_0, s_1, \ldots s_{k-1} \in \mathbf{N}$ such that:

(*i*) $a\alpha b \Rightarrow m \mid a - b$;

(*ii*) $(\forall t \in \mathbf{N}^0)$ $[(s_i + t)n + id]^\alpha$ is an infinite class, and, for every $v \in A_i$, $v < s_i n + id \Rightarrow v^\alpha$ is a finite class for $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

(*iii*) The integers s_i satisfy the following condition:

$$s_i \geqslant a_i,\ s_i + a_j \geqslant \begin{cases} s_{i+j} & , \quad i+j<k \\ s_{i+j-k}-1, & i+j \geqslant k. \end{cases} \quad \square \qquad (*)$$

We shall call the finite sequence $(m, s_0, \ldots, s_{k-1}) = (m, s_i)$ the characteristic of the congruence α, or we shall say α has the characteristic (m, s_i).

T. 2. 2.(*i*) For each sequence (m, s_i) satisfying $(*)$, there exists a congruence on G, with the characteristic (m, s_i).

(*ii*) If $k > 1$, there exists a sequence satisfying $(*)$ which is the characteristic of more than one congruence. □

We shall denote by $K^m_{(s_i)}$ the set of all congruences on G with the characteristic (m, s_i).

T. 2. 3. For each sequence (m, s_i) satisfying $(*)$, $K^m_{(s_i)}$ is a finite set.

Faculty of Mathematical Sciences,
Skopje.