Ѓорги Чупона и Смиле Марковски

СМЕСТУВАЊА НА УНИВЕРЗАЛНИ АЛГЕБРИ

Основен резултат на оваа работа е *теоремата за сместување* во која се дава еден доволен услов за да може секоја алгебра $A(\Theta)$ од едно многуобразие Θ-алгебри $\hat{}\Sigma^*$ да се смести во алгебра $B(\Omega)$ што припаѓа на многуобразието Σ^* Ω-алгебри. (Притоа, $\hat{}\Sigma^*$ е на соодветен начин добиено од Σ^*).

Работава е поделена на четири дела. Во првиот дел се содржани неопходните претходни дефиниции, а во вториот се докажува споменатата теорема за сместување. Потоа, во третиот дел оваа теорема се формулира во друга форма, така што се добива еден доволен услов за да биде многуобразие една класа обопштени подалгебри на алгебри од дадено многуобразие. Во четвртиот дел се илустрираат резултатите од оваа работа со пет познати примери, при што во првите два е задоволен соодветниот услов за сместување, а во преостанатите три не е. Но, за разлика од третиот и четвртиот, каде во општ случај не е можно сместување, во петтиот секогаш такво сместување е можно. Овој последен пример ја сугерира задачата да се изучи класата многуобразија за кои соодветниот услов е и нужен за да важи теоремата за сместување.

0. ПРЕТХОДНИ ДЕФИНИЦИИ

Овде ќе ги изнесеме само оние претходни дефиниции што се неопходни за формулирање на основниот резултат на работава.

0.1. **Ω-зборови.** Нека Ω е множество финитарни оператори, а $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ бесконечно преброиво множество, чии елементи ги викаме слободни променливи. Со Ω_X го означуваме множеството од сите Ω-зборови над X. Според тоа:

Конечната низа ξ чии членови се елементи од $\Omega \cup X$ припаѓа на Ω_X акко[1]

$$\xi \in \Omega_0 \cup X$$

или

$$\xi = \omega\, \xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n,$$

каде што $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Omega_X$, $\omega \in \Omega_n$.

[1]) „акко“ е кратенка за „ако и само ако“.

Ако $\xi \in \Omega_X$ и ако $y_1 y_2 \dots y_m$[1]) е низата елементи од X која се добива од ξ со „бришење" на сите оператори, тогаш ќе пишуваме:

$$\xi = \xi\,[y_1, y_2, \dots, y_m]. \tag{0.1.1}$$

Да претпоставиме сега дека $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ е било која низа со m члена. Тогаш со

$$\xi\,[\zeta_1, \dots, \zeta_m] \tag{0.1.1'}$$

ќе ја означуваме низата што се добива од ξ кога во неа наместо y_i се замени ζ_i.

Да уочиме дека:

(i) Ако $\xi = \xi\,[y_1, \dots y_m]$, $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \Omega_X$, тогаш $\xi\,[\zeta_1, \dots, \zeta_m] \in \Omega_X$.

0.2. **Многуобразија.** Нека $A\,(\Omega)$ е Ω-алгебра, т.е. секој n-арен оператор $\omega \in \Omega_n$ е интерпретиран како n-арна операција во A. Ако $\xi\,[y_1, \dots, y_m]$ е произволен Ω-збор, а $a_1 \dots a_m$ низа од m елементи од A, тогаш на обичен начин се дефинира вредноста $a = \xi\,[a_1, \dots, a_m] \in A$ на зборот ξ на низата $a_1 \dots a_m$.

(i) Ако $\xi = \xi\,[y_1, \dots, y_m]$, $\eta = \eta\,[z_1, \dots, z_k]$ се два Ω-зборови, тогаш велиме дека на $A(\Omega)$ е точен идентитетот $\xi \equiv \eta$ акко

$$\xi\,[a_1, \dots, a_m] = \eta\,\,[b_1, \dots, b_k]$$

за секоја низа $a_1 \dots a_m b_1 \dots b_k$ што е потчинета на низата $y_1 y_2 \dots y_m z_1 \dots z_k$.

(ii) Притоа,, за низата $\mathbf{d} = d_1 \dots d_p$ велиме дека е потчинета на низата $\mathbf{c} = c_1 \dots c_p$ акко $c_i = c_j \Rightarrow d_i = d_j$; ако и $\mathbf{c}$ е потчинета на $\mathbf{d}$, тогаш велиме дека двете низи се изоморфни.

(iii) Нека Σ е множество подредени двојки (ξ, η) од Ω-зборови, т.е. $\Sigma \subseteq \Omega_X \times \Omega_X$. Со Σ^* ја означуваме класата Ω-алгебри $A\,(\Omega)$ на кои $\xi \equiv \eta$ е идентитет за секоја двојка $(\xi, \eta) \in \Sigma$; за Σ^* велиме дека е многуобразието Ω-алгебри дефинирано со Σ. Ако $\xi, \eta \in \Omega_X$ и ако $\xi \equiv \eta$ е идентитет на секоја алгебра $A(\Omega) \in \Sigma^*$, тогаш велиме дека $\xi \equiv \eta$ е последица од Σ и пишуваме $\Sigma \models \xi = \eta$.

(Во [2], стр. 291, може да се најде подетален опис на фамилијата идентитети што се последици од дадено множество идентитети).

0.3. **Врски меѓу алгебри од различни типови**. Нека Θ и Ω се две множества финитарни оператори и нека на секој оператор $\rho \in \Theta_n$ му кореспондира Ω-збор $\rho^* = \rho^*\,[y_1, \dots, y_m]$ и пресликување $\rho' : \nu \to \rho'(\nu)$

[1]) Во иднина со $y, y_n, \dots, z, z_m, \dots, u, \dots$ ќе ги означуваме слободните променливи, т.е. елементите од X.

од $\{1, \ldots, m\}$ во $\{1, \ldots, n\}$. Ќе дефинираме пресликување $\hat{}: \alpha \to \alpha\hat{}$ од Θ_X во Ω_X на следниот начин:

(i) $x\hat{} = x$, $(\forall x \in X)$

(ii) Ако $\rho \in \Theta_n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Theta_X$, $\alpha = \rho\, \alpha_1 \ldots \alpha_n$,

тогаш

$$\alpha\hat{} = \rho^* [\alpha\hat{}_{\rho'(1)}, \alpha\hat{}_{\rho'(2)}, \ldots, \alpha\hat{}_{\rho'(m)}], \tag{0.3.1.}$$

каде што $\rho^* = \rho^* [y_1, \ldots, y_m]$, $\alpha_\nu \to \alpha_\nu\hat{}$.

За пресликувањето $\hat{}$ велиме дека е *претставување* на Θ во Ω.

Нека $\hat{}$ е претставување од Θ во Ω и нека

$$\alpha = \alpha [y_1, \ldots, y_k],\ \alpha\hat{} = \alpha\hat{}\ [z_1, \ldots, z_s].$$

Ќе дефинираме пресликување $\alpha' : i \to \alpha'(i)$ од $\{1, \ldots, s\}$ во $\{1, \ldots, k\}$ на следниот начин.

(iii) Ако $\alpha = y_1 \in X$, тогаш $\alpha'(1) = 1$.

(iv) Нека $\alpha = \rho\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$, $\rho \in \Theta_n$ и нека претпоставиме дека α_ν' е дефинирано пресликување од $\{1, \ldots, s_\nu\}$ во $\{1, \ldots, k_\nu\}$, каде што

$$\alpha_\nu = \alpha_\nu [y_{k_1 + \cdots + k_{\nu-1}+1}, \ldots, y_{k_1 + \cdots + k_\nu}].\ \text{Тогаш}$$

$$\alpha\hat{} = \rho^* [\alpha\hat{}_{\rho'(1)}, \ldots, \alpha\hat{}_{\rho'(m)}],$$

од што следува дека $s = s_{\rho'(1)} + \ldots + s_{\rho'(m)}$. Нека $j \in \{1, \ldots, s\}$; тогаш постои единствен $\nu \in \{1, \ldots, m\}$ таков што $j = s_{\rho'(1)} + \ldots + s_{\rho'(\nu-1)} + i$, $1 \leqslant i \leqslant s_{\rho'(\nu)}$. Сега ставаме:

$$\alpha'(j) = \alpha'_{\rho'(\nu)}(i).$$

Со тоа сме дефинирале пресликување α' од $\{1, \ldots, s\}$ во $\{1, \ldots, k\}$.

За натаму наместо $[z_1, \ldots, z_s]$ ќе пишуваме $[y_1, \ldots, y_k]^\alpha$, а и поопшто $[\zeta_1, \ldots, \zeta_k]^\alpha$ наместо $[\zeta_{\alpha'(1)}, \ldots, \zeta_{\alpha'(s)}]$.

Нека $A(\Theta)$ и $B(\Omega)$ се две алгебри од тип Θ односно Ω. За првата велиме дека е $(\Theta, \hat{})$-*подалгебра* од втората акко:

(v) $A \subseteq B$ и $\alpha [a_1, \ldots a_m] = \alpha\hat{}\ [a_1, \ldots, a_m]^\alpha$ за секој Θ-збор $\alpha [y_1, \ldots, y_m] \in \Theta_X$ и низа елементи $a_1 \ldots a_m$ од A, што е потчинета на $y_1 \ldots y_m$.

Ако Σ е множество идентитети од тип Ω, а $\hat{}$ претставување од Θ во Ω, тогаш за множеството идентитети $\hat{}\Sigma$ од тип Θ дефинирано со:

(vi) $(\alpha, \beta) \in \hat{}\Sigma \Leftrightarrow \Sigma \vDash \alpha\hat{} = \beta\hat{}$

велиме дека е *индуцирано од* Σ *со* $\hat{}$, а за многубразието $\hat{}\Sigma^*$ Θ-алгебри дека е *индуцирано од* Σ^* *со* $\hat{}$.

1. ТЕОРЕМА ЗА СМЕСТУВАЊЕ

Основниот резултат на оваа работа е вториот дел од следнава теорема за сместување.

ТЕОРЕМА: Нека ${}^{\wedge}$ е претставување од множеството оператори Θ во Ω, а Σ множество идентитети од тип Ω.

(i) Ако алгебрата $A(\Theta)$ е $(\Theta, {}^{\wedge})$-подалгебра на некоја алгебра $B(\Omega)$ од многуборазието Σ^*, тогаш $A(\Theta)$ припаѓа на индуцираното многуобразие ${}^{\wedge}\Sigma^*$.

(ii) Нека Σ и ${}^{\wedge}$ го задоволуваат следниов услов:

$\#$ | Ако $\xi = \xi[y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_k] \in \Omega_X$, $\alpha, \beta \in \Theta_X$ се такви што $\Sigma \models \xi[y_1, \ldots, \alpha^{\wedge}, \ldots, y_k] = \beta^{\wedge}$, тогаш постои $\gamma \in \Theta_X$ таков што $\Sigma \models \xi = \gamma^{\wedge}$.

Во тој случај секоја алгебра $A(\Theta)$ од многуобразието ${}^{\wedge}\Sigma^*$ е $(\Theta, {}^{\wedge})$-подалгебра на некоја алгебра $B(\Omega) \in \Sigma^*$.

Доказ. (i) Да претпоставиме дека $(\alpha, \beta) \in {}^{\wedge}\Sigma$. Тогаш $\Sigma \models \alpha^{\wedge} = \beta^{\wedge}$ па значи $\alpha^{\wedge} \equiv \beta^{\wedge}$ е идентитет на алгебрата $A(\Omega)$. Нека $\alpha = \alpha[y_1, \ldots, y_n]$. $\beta = \beta[z_1, \ldots, z_m]$, т.е. $\alpha^{\wedge} = \alpha^{\wedge}[y_1, \ldots, y_n]^{\alpha}$, $\beta^{\wedge} = \beta^{\wedge}[z_1, \ldots, z_m]^{\beta}$. Ако $a_1, \ldots a_n b_1 \ldots b_m$ е низа елементи од A потчинета на $y_1 y_2 \ldots y_n z_1 \ldots z_m$, тогаш низата $[a_1, \ldots, a_n]^{\alpha} [b_1, \ldots, b_m]^{\beta}$ е секако потчинета на $[y_1, \ldots, y_n]^{\alpha} [z_1, \ldots, z_m]^{\beta}$[1], од што, ако се има предвид дека $\alpha^{\wedge} \equiv \beta^{\wedge}$ е идентитет на $B(\Omega)$, добиваме

$$\alpha[a_1, \ldots, a_n] = \alpha^{\wedge}[a_1, \ldots, a_n]^{\alpha} = \beta^{\wedge}[b_1, \ldots, b_m]^{\beta} = \beta[b_1, \ldots, b_m],$$

т.е. дека $\alpha \equiv \beta$ е навистина идентитет на $A(\Theta)$.

(ii) Вториот дел на теоремата ќе го докажеме во неколку етапи.

Да претноставиме дека е исполнет условот ($\#$) и дека $A(\Theta)$ е алгебра од многуобразието ${}^{\wedge}\Sigma$, т.е. за секои $\alpha, \beta \in \Theta_X$, такви што $\Sigma \models \alpha^{\wedge} = \beta^{\wedge}$, $\alpha \equiv \beta$ е идентитет на $A(\Theta)$. Треба да покажеме дека $A(\Theta)$ е $(\Theta, {}^{\wedge})$-подалгеба на некоја алгебра $B(\Omega) \in \Sigma^*$. Ако $\Sigma \models \xi = \eta$ за секои $\xi, \eta \in \Omega_X$, тогаш имаме ${}^{\wedge}\Sigma = \Theta_X \times \Theta_X$, и во тој случај нема што да се докаже, па затоа ќе претпоставуваме дека Σ^* не е тривијалното многуобразие, т.е. дека постојат Ω-зборови $\xi, \eta \in \Omega_X$ така што $\xi = \eta$ не е последица од Σ.

Да ја означиме со F_A алгебрата од многуобразието Σ^* што е слободно генерирана од A. Според тоа ([2] стр. 297) F_A се состои од сите низи $\xi[a_1, \ldots, a_m]$, каде $a_r \in A$, и притоа $\xi[a_1, \ldots, a_m] = \eta[b_1, \ldots, b_k]$ во F_A акко $\Sigma \models \eta[y_1, \ldots, y_m] = \eta[z_1, \ldots, z_k]$ за секоја низа $y_1 \ldots y_m z_1 \ldots z_k$ слободни променливи што е потчинета на $a_1 \ldots a_m b_1 \ldots b_k$.

[1]) Односно низата $a_{\alpha'(1)} \ldots a_{\alpha'(p)} b_{\beta'(1)} \ldots b_{\beta'(q)}$ е потчинета на $y_{\alpha'(1)}, \ldots y_{\alpha'(p)} z_{\beta'(1)} \ldots z_{\beta'(q)}$.

Од направената претноставка за нетривијалноста на Σ следува дека A е подмножество на F_A.

Ако $a_i = \alpha [b_1, \ldots, b_k]$ во $A(\Theta)$ и $t = \xi [a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n]$ во F_A, тогаш ќе пишуваме:

$$t \vdash \xi [a_1, \ldots, \alpha^{\wedge} [b_1, \ldots, b_k]^{\alpha}, \ldots, a_n].$$

а потоа со $\vdash\dashv$ го означуваме транзитивниот производ на $\{\vdash, \dashv\}$, каде што $\dashv = \vdash^{-1}$. Според тоа $t' \vdash\dashv t''$ акко постои низа $s_0, \ldots, s_k$ таква што $s_0 \Box s_1, s_1 \Box s_2 \ldots, s_{k-1} \Box s_k$, $s_0 = t'$, $s_k = t''$, а $\Box$ е $\vdash$ или $\dashv$.

Од дефиницијата на $\vdash\dashv$ е непосредно јасно дека $\vdash\dashv$ е конгруенција на алгебрата $F_A(\Omega)$. Да ставиме

$$A^{\vdash\dashv} = \{a^{\vdash\dashv} \mid a \in A\}.$$

каде што $a^{\vdash\dashv}$ е класата на еквивалентноста $\vdash\dashv$ во која се содржи a.

Пресликувањето $\varphi : a \to a^{\vdash\dashv}$ е секако сурјекција од A во $A^{\vdash\dashv}$, а исто така и хомоморфизам од Θ-алгебрата A во Θ-алгебрата $A^{\vdash\dashv}$ дефинирана со:

$$(\forall \alpha \in \Theta_X, a_1^{\vdash\dashv}, \ldots, a_m^{\vdash\dashv} \in A^{\vdash\dashv}, a_i \in A)\, \alpha\, [a_1^{\vdash\dashv}, \ldots, a_m^{\vdash\dashv}] =$$
$$= (\alpha^{\wedge} [a_1, \ldots, a_m]^{\alpha})^{\vdash\dashv}.$$

Притоа, $A^{\vdash\dashv}$ е $(\Theta, {}^{\wedge})$ -подалгебра од фактор-алгебрата $F_A/_{\vdash\dashv}(\Omega)$.

Од ова следува дека $A(\Theta)$ е $(\Theta, {}^{\wedge})$-подалгебра на Ω-алгебра $B(\Omega) \in \Sigma^*$ акко е исполнет следниов услов: $a, b \in A \Rightarrow (a \vdash\dashv b \Leftrightarrow a = b)$.

Дека горната импликација е точна ќе покажеме со помош на неколку леми.

Лема 1. Нека $\alpha, \beta \in \Theta_X$, $y \in X$ и нека со $\alpha(y|\beta)$ го означиме зборот што се добива од α кога на местото на секое појавување на y се стави β. Тогаш:

$$(\alpha(y|\beta))^{\wedge} = \alpha^{\wedge}(y|\beta^{\wedge}).$$

Доказ. Ако во зборот α не се појавува слободната променлива y, тогаш имаме $\alpha(y|\beta) = \alpha$, а исто така $\alpha^{\wedge}(y|\beta^{\wedge}) = \alpha^{\wedge}$, т.е. во овој случај важи равенството. Ако пак $\alpha = y$, тогаш $(\alpha(y|\beta))^{\wedge} = \beta^{\wedge} = y^{\wedge}(y|\beta^{\wedge})$.

Нека $\alpha = \rho\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, $\rho \in \Theta_n$. Да уочиме дека

$$\alpha(y|\beta) = \rho\alpha_1(y|\beta)\alpha_2(y|\beta) \ldots \alpha_n(y|\beta).$$

Според тоа, користејќи индуктивна претпоставка, (и ако се има предвид (0.3.1.). имаме:

$$(\alpha(y|\beta))^{\wedge} = \rho^* [(\alpha_{\rho'(1)}(y|\beta))^{\wedge}, \ldots, (\alpha_{\rho'(m)}(y|\beta))^{\wedge}]$$
$$= \rho^* [\alpha_{\rho'(1)}(y|\beta^{\wedge}), \ldots, \alpha_{\rho'(m)}(y|\beta^{\wedge})]$$
$$= \alpha^{\wedge}(y|\beta^{\wedge}). \blacksquare$$

Лема 2. Нека $a \in A$, $t \in F_A$. Тогаш $a \vdash t$ акко постојат $\alpha = \alpha\,[y_1, \ldots, y_m] \in \Theta_X$, $a_1, \ldots, a_m \in A$ такви што:

$$a = \alpha\,[a_1, \ldots, a_m] \text{ во } A(\Theta)$$
$$t = \alpha\,\hat{}\,[a_1, \ldots, a_m]^{\alpha} \text{ во } F_A. \tag{2.1}$$

Доказ. Ако (2.1) е точно, тогаш според дефиницијата на $\vdash$ имаме $a \vdash t$.

Да претпоставиме дека $a \vdash t$. Тогаш постои $\xi \in \Omega_X$ таков што:

$$a = \xi\,[a_1, \ldots a_i, \ldots, a_k],\ t = \xi\,[a_1, \ldots, \beta\,\hat{}\,[b_1, \ldots, b_p]^{\beta}, \ldots, a_k] \text{ во } F_A,$$
$$a_i = \beta\,[b_1, \ldots, b_p] \text{ во } A(\Theta). \tag{2.2}$$

Од првото равенство во (2.2) следува дека

$$\Sigma \vDash y = \xi\,[y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_k], \tag{2.3}$$

за секоја низа слободни променливи $yy_1 \ldots y_i \ldots y_k$ што е изоморфна со $aa_1 \ldots a_i \ldots a_k$. Потоа, според (‡‡), бидејќи $y_i\,\hat{} = y_i$, за секоја слободна променлива z постои $\gamma \in \Theta_X$ таков што:

$$\Sigma \vDash \gamma\,\hat{} = \xi\,[y_1, \ldots, z, \ldots, y_k]. \tag{2.4}$$

Слободната променлива z нека е избрана така што $z \neq y, y_1, \ldots, y_k$.[1] Да замениме во (2.4) наместо z прво y_i, а потоа $\beta\,\hat{}\,[z_1, \ldots, z_p]^{\beta}$. Користејќи ја и лемата 1 добиваме:

$$\Sigma \vDash (\gamma\,(z \mid y_i))\,\hat{} = \xi\,[y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_k] \tag{2.5}$$

$$\Sigma \vDash (\gamma\,(z \mid \beta\,[z_1, \ldots, z_p]))\,\hat{} = \xi\,[y_1, \ldots, \beta\,\hat{}\,[z_1, \ldots, z_p]\,\hat{}, \ldots, y_k]. \tag{2.6}$$

Од (2.3) и (2.5) добиваме прво

$$\Sigma \vDash y = (\gamma\,(z \mid y_i))\,\hat{},$$

а потоа и

$$\hat{}\,\Sigma \vDash y = \gamma\,(z \mid y_i). \tag{2.7}$$

Нека $\gamma = \gamma\,[u_1, \ldots, u_q]$ и нека $r\ (0 \leqslant r \leqslant q)$ членови на низата $u_1 \ldots u_q$ се z; на пример, $u_{\nu_1} = u_{\nu_2} = \ldots = u_{\nu_r}$, $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_r$.

---

[1] За натаму секогаш кога ќе воведуваме нови слободни променливи ќе претпоставуваме дека се различни од сите други што порано се сретнати во соодветното расудување.

Тогаш се точни равенствата:

$$\delta\,[v_1, \ldots, v_s] = \gamma\,(z \mid \beta\,[z_1, \ldots, z_p]) =$$

$$= \gamma\,[\ldots, \beta\,[z_1, \ldots, z_p], \ldots, \beta\,[z_1, \ldots, z_p], \ldots], \tag{2.8}$$

$$\delta^{\wedge}\,[v_1, \ldots, v_s]^{\delta} = \gamma^{\wedge}\,[\ldots, \beta^{\wedge}\,[z_1, \ldots, z_p]^{\beta}, \ldots, \beta^{\wedge}\,[z_1, \ldots, z_p], \ldots]^{\gamma},$$

$$\gamma\,(z \mid y) = \gamma\,[\ldots, y_i, \ldots, y_i, \ldots] \tag{2.9}$$

Во (2.6) и (2.7) да ја замениме низата слободни променливи $y\,y_1 \ldots y_i \ldots y_k$ со $a\,a_1 \ldots a_i \ldots a_k$ а $z_1 \ldots z_p$ со $b_1 \ldots b_p$; секоја друга слободна променлива u_i се заменува произволно со елемент $c_i \in A$. По извршените замени, ако се имаат предвид (2.2) и (2.8), (2.9), (2.10), се добива:

$$\mathrm{t} = \gamma^{\wedge}\,[\ldots \beta^{\wedge}\,[b_1, \ldots, b_p]^{\beta}, \ldots, \beta^{\wedge}\,[b_1 \ldots b_p]^{\beta}, \ldots]^{\gamma}.$$

$$a = \gamma\,[\ldots, a_i, \ldots, a_i, \ldots]$$

$$= \gamma\,[\ldots, \beta\,[b_1, \ldots, b_p], \ldots, \beta\,[b_1, \ldots, b_p], \ldots],$$

т.е.

$$\mathrm{t} = \delta^{\wedge}\,[d_1, \ldots, d_s]^{\delta},\ a = \delta\,[d_1, \ldots, d_s].$$

што беше потребно да се покаже. ∎

Лема 3. Ако $a \in A$ и $\mathrm{t} \models a$, тогаш $a \models \mathrm{t}$.

Доказ. Од $\mathrm{t} \models$ следува дека t има облик

$$\mathrm{t} = \xi\,[a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m] \quad \text{во} \quad F_A,$$

$$a_i = \beta\,[b_1, \ldots, b_k] \quad \text{во} \quad A\,(\Theta)$$

и

$$a = \xi\,[a_1, \ldots, \beta^{\wedge}\,[b_1, \ldots, b_k]^{\beta}, \ldots, a_m] \quad \text{во} \quad F_A.$$

Од последното равенство следува дека

$$\Sigma \models y = \xi\,[y_1, \ldots, \beta^{\wedge}\,[z_1 \ldots, z_k]^{\beta}, \ldots, y_m]. \tag{3.1}$$

каде што $y\,y_1 \ldots z_1 \ldots z_k \ldots y_m$ е низа слободни променливи изморфна со низата $a\,a_1 \ldots b_1 \ldots b_k \ldots a_m$. Според (♯) (имајќи го предвид тоа што $y = y^{\wedge}$) постои $\gamma \in \Theta_X$ таков што:

$$\Sigma \models \gamma^{\wedge} = \xi\,[y_1, \ldots, z, \ldots, y_m]. \tag{3.2}$$

каде што z е слободна променлива различна од слободните променливи што се јавуваат во (3.1). Ако во (3.2) ставиме $\beta^\wedge [z_1, \ldots, z_k]^\beta$ наместо z ќе добиеме:

$$\Sigma \sqsupset (\gamma (z \mid \beta [z_1, \ldots, z_k]))^\wedge = \xi [y_1, \ldots, \beta^\wedge [z_1, \ldots, z_k]^\beta, \ldots, y_m],$$

а според (3.1) и:

$$\Sigma \sqsupset y = (\gamma (z \mid \beta [z_1, \ldots, z_k]))^\wedge,$$

па и:

$$^\wedge\Sigma \sqsupset y = \gamma (z \mid \beta [z_1, \ldots, z_k]). \tag{3.3}$$

Нека $\gamma = \gamma [u_1, \ldots, u_p]$, и нека во (3.2) низата $y y_1 \ldots z \ldots y_m$ ја замениме со низата $aa_1 \ldots a_i \ldots a_m$; слободните променливи u што се различни од $y, y_1, \ldots, z, \ldots, y_m$ се заменуваат произволно со елементи c_v од A. (Притоа, низата $u_1 \ldots u_p$ ќе се замени со $c_1, \ldots, c_p$.) Така ќе добиеме:

$$\mathrm{t} = \gamma^\wedge [c_1, \ldots, c_p]^\gamma. \tag{3.4}$$

Ќе покажеме дека $a = \gamma [c_1, \ldots, c_p]$, од што, според (3.4) и ќе следува заклучокот дека $a \vdash \mathrm{t}$.

Да претноставиме дека $z = u_{\nu_1} = \ldots = u_{\nu_j}$, каде што $0 \leqslant j \leqslant p$, $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_j$. Тогаш (3.3) го има обликот:

$$^\wedge\Sigma \sqsupset y = \gamma [\ldots, \beta [z_1, \ldots, z_k], \ldots, \beta [z_1, \ldots, z_k] \ldots] \tag{3.3'}$$

Во (3.3′) низата $yz_1 \ldots z_k$ ја заменуваме со $ab_1 \ldots b_k$, а секоја друга слободна променлива u_λ се заменува со c_λ (определен како и погоре). Добиваме:

$$a = \gamma [c_1, \ldots, a_i, \ldots, a, \ldots, c_p].$$

Но, $z = u_{\nu_1} = \ldots = u_{\nu_j}$, па значи $c_{\nu_1} = c_{\nu_2} = \ldots = c_{\nu_j} = a_i$, т.е.

$$a = \gamma [c_1, \ldots, c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_j}, \ldots, c_p]. \blacksquare$$

Лема 4. Ако $a \in A$, $a \vdash \mathrm{t}$ и $\mathrm{t} \vdash s$, тогаш $a \vdash s$.

Доказ. Поради $a \vdash \mathrm{t}$, според лемата 2, постои $\alpha \in \Theta_X$ таков што

$$a = \alpha [a_1, \ldots, a_m] \text{ во } A (\Theta) \tag{4.1}$$

и

$$\mathrm{t} = \alpha^\wedge [a_1, \ldots, a_m]^\alpha \text{ во } \mathrm{F}_A. \tag{4.2}$$

Од $\mathrm{t} \vdash s$ следува дека t може да се претстави и во облик

$$\mathrm{t} = \xi [b_1, \ldots, b_n],$$

каде што $\xi \in \Omega_X$, така што

$$s = \xi\,[b_1, \ldots, \beta^\wedge\,[c_1, \ldots, c_k]^\beta, \ldots, b_n], \tag{4.2}$$

при што

$$b_i = \beta\,[c_1, \ldots, c_k] \text{ во } A\,(\Theta).$$

Поради равенството:

$$\alpha^\wedge\,[a_1, \ldots, a_m]^\alpha = \xi\,[b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_n],$$

имаме:

$$\Sigma \sqsubset \alpha^\wedge\,[y_1, \ldots, y_m]^\alpha = \xi\,[z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n], \tag{4.3}$$

при што $y_1 \ldots y_m z_1 \ldots z_n$ е низа слободни променливи изоморфна со низата $a_1 \ldots a_m b_1 \ldots b_n$. Користејќи го условот (#) заклучуваме дека ако z е слободна променлива различна од $z_1 \ldots z_n$, тогаш постои $\gamma \in \Theta_X$ таков што

$$\Sigma \sqsubset \gamma = \xi\,[z_1, \ldots, z, \ldots, z_n]. \tag{4.4}$$

Заменувајќи во (4.4) z_i наместо z, според (4.3) и лемата 1, ќе добиеме

$$\Sigma \sqsubset (\alpha\,[y_1, \ldots, y_m])^\wedge = (\gamma\,(z \mid z_i))^\wedge,$$

т.е.

$$^\wedge\Sigma \sqsubset \alpha\,[y_1, \ldots, y_m] = \gamma\,(z \mid z_i). \tag{4.5}$$

Ако во (4.4) z се замени со $\beta^\wedge\,[u_1, \ldots, u_k]^\beta = (\beta[u_1, \ldots, u_k])^\wedge$, се добива:

$$\Sigma \sqsubset (\gamma\,(z \mid \beta\,[u_1, \ldots, u_k])^\wedge = \xi\,[z_1, \ldots, \beta^\wedge\,[u_1, \ldots, u_k]^\beta, \ldots, z_n]. \tag{4.6}$$

Нека $\gamma = \gamma\,[v_1, \ldots, v_p]$, при што $v_{\lambda_1} = \ldots = v_{\lambda_j} = z$ $(0 \leqslant j \leqslant p)$. Да ја воведеме и ознаката:

$$\delta\,[w_1, w_2, \ldots, w_q] = \gamma\,(z \mid \beta\,[u_1, \ldots, u_k]).$$

Низата слободни променливи $y_1 \ldots y_n z_1 \ldots z_i \ldots z_n$ во (4.5) и (4.6) ќе ја замениме со $a_1 \ldots a_m b_1 \ldots b_i \ldots b_n$, а $u_1 \ldots u_k$ со $c_1 \ldots c_k$. Секоја друга слободна променлива w се заменува со произволен елемент d_λ од A. Така од (4.5), (4.1) и (4.2) добиваме:

$$\begin{aligned} a = \alpha\,[a_1, \ldots, a_m] &= \gamma\,[\ldots, b_i, \ldots, b_i, \ldots] \\ &= \gamma\,[\ldots, \beta\,[c_1, \ldots, c_k], \ldots, \beta\,[c_1, \ldots, c_k], \ldots] \\ &= \delta\,[d_1, \ldots, d_q]. \end{aligned}$$

Од (4.6), според (4.2) и лемата 1, добиваме:

$$s = \delta^\wedge\ [d_1, \ldots, d_q]^\delta,$$

т.е. $a \vdash s$. ∎

Лема 5. Ако $a \in A$ и ако $a \vdash \mathrm{t}$, $s \vdash \mathrm{t}$, тогаш $a \vdash s$.

Доказ. Нека $a = \alpha\,[a_1, \ldots, a_m]$ во $A\,(\Theta)$ и $\mathrm{t} = \alpha^\wedge\ [a_1, \ldots, a]^\alpha$. Од $s \vdash \mathrm{t}$ следува дека s има облик:

$$s = \xi\,[b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_n], \tag{5.1}$$

а t:

$$\mathrm{t} = \xi\,[b_1, \ldots, \beta^\wedge\ [c_1, \ldots, c_k]^\beta, \ldots, b_n], \tag{5.2}$$

каде што $b_i = \beta\,[c_1, \ldots, c_k]$ во $A\,(\Theta)$. Точно е, значи, равенството:

$$\alpha^\wedge\ [a_1, \ldots, a_m]^\alpha = \xi\,[b_1, \ldots, \beta^\wedge\ [c_1, \ldots, c_k]^\beta, \ldots, b_n],$$

од што следува дека:

$$\Sigma \leftrightharpoons \alpha^\wedge\ [y_1, \ldots, y_m]^\alpha = \xi\,[z_1, \ldots, \beta^\wedge\ [u_1, \ldots, u_k]^\beta, \ldots, z_n], \tag{5.3}$$

каде што $y_1 \ldots y_m z_1 \ldots u_1 \ldots u_k \ldots z_n$ е низа слободни променливи изоморфна со $a_1 \ldots a_m\, b_1 \ldots c_1 \ldots c_k \ldots b_n$.

Од (5.3), според (⧺), добиваме дека постои $\gamma \in \Theta_X$, таков што

$$\Sigma \leftrightharpoons \gamma^\wedge = \xi\,[z_1, \ldots, z, \ldots, z_n] \tag{5.4}$$

каде што z е слободна променлива различна од $z_1, \ldots, z_n$.

Од (5.3) и (5.4) сега добиваме:

$$\Sigma \leftrightharpoons (\gamma\,(z \mid \beta\,[u_1, \ldots, u_k]))^\wedge = (\alpha\,[y_1, \ldots, y_m])^\wedge,$$

од што следува:

$$^\wedge\Sigma \leftrightharpoons \gamma\,(z \mid \beta\,[u_1, \ldots, u_k]) = \alpha\,[y_1, \ldots, y_m]. \tag{5.5}$$

Ако во (5.4) ја замениме низата $z_1 \ldots z_{i-1}\ z z_{i+1} \ldots z_n$ со $b_1 \ldots b_n$, според (5.1), ќе добиеме

$$s = \gamma^\wedge\ [d_1, \ldots, d_p]^\wedge,$$

а потоа, со помош на (5.5) и работејќи на ист начин како и во претходните леми, се добива дека

$$a = \gamma\,[d_1, \ldots, d_p],$$

па значи $a \vdash s$, што и сакавме да докажеме.

Лема 6. Ако $a, b \in A$ и $a \vdash b$, тогаш $a = b$.

Доказ. Според лемата 2 постои $\alpha \in \Theta_X$ и $a_1, \dots, a_m \in A$, такви што $a = \alpha[a_1, \dots, a_m]$ во $A(\Theta)$, $b = \alpha^\wedge [a_1, \dots, a_m]^\alpha$ во F_A. Од ова следува дека ако $yy_1 \dots y_m$ е низа слободни променливи изоморфна со $ba_1 \dots a_m$, тогаш

$$\Sigma \vDash y = \alpha^\wedge [y_1, \dots, y_m]^\alpha,$$

односно

$$^\wedge\Sigma \vDash y = \alpha [y_1, \dots, y_m].$$

Од последниот идентитет се добива

$$b = \alpha [a_1, \dots, a_m] = a,$$

што и сакавме да докажеме. ∎

Ќе го комплетираме сега доказот на теоремата.

Нека $a, b \in A$ и $a \dashv\vdash b$. Тогаш постојат $t_1, \dots, t_k \in F_A$. такви што

$$a \square t_1 \square t_2 \square \dots \square t_k \square b,$$

каде што $\square$ е $\vdash$ или $\dashv$. Со последователна примена на лемите 3, 4 и 5 прво добиваме $a \vdash b$, а потоа со помош на лемата 6 и $a = b$.

Со тоа целосно е комплетиран доказот на теоремата.

2. ОБОПШТЕНИ ПОДАЛГЕБРИ

Резултатот докажан во претходниот дел зборува за претставување на алгебри од различни типови. Овде ќе дадеме друга форма на тој резултат.

2.1. **Обопштени подалгебри**. Нека Ω е множество финитарни оператори, а $\Theta^\wedge$ подмножество од множеството Ω_X зборови од тип Ω. Ќе го формираме множеството зборови $\Theta_{\hat{X}}$ генерирано од $\Theta^\wedge$ на следниот начин:

(i) $X \subseteq \Theta_{\hat{X}}$;

(ii) Ако $\alpha^\wedge [y_1, \dots, y_m] \in \Theta^\wedge$, а $\beta_1^\wedge, \dots, \beta_m^\wedge \in \Theta_{\hat{X}}$, при што низата $\beta_1^\wedge \dots \beta_m^\wedge$ е потчинета на низата $y_1 \dots y_m$ слободни променливи, тогаш $\alpha^\wedge [\beta_1^\wedge, \dots, \beta_m^\wedge] \in \Theta_{\hat{X}}$.

Ако $B(\Omega)$ е Ω-алгебра, а A подмножество од B, тогаш за A велиме дека е $\Theta^\wedge$-*подалгебра* на $B(\Omega)$ ако е исполнет следниов услов:

(iii) За секој збор $\alpha^\wedge [y_1, \dots, y_m] \in \Sigma_{\hat{X}}$ и секоја низа $a_1 \dots a_m$ потчинета на низата $y_1 \dots y_m$ имаме: $\alpha^\wedge [a_1, \dots, a_m] \subset A$.

Јасно е дека:

(iv) Ако A е $\Theta^\wedge$-подалгебра на $B(\Omega)$, тогаш A е и $\Theta_{\hat{X}}$ -подалгебра на $B(\Omega)$

Ако $B(\Omega)$ е дадена алгебра и $A \subseteq B$, ќе велиме дека A е *обопштена подалгебра* на $B(\Omega)$ акко A е $\Theta^\wedge$-подалгебра на $B(\Omega)$ за некое $\Theta^\wedge \subseteq \Omega_X$.

2.2. Еден доволен услов за фамилијата $\Theta^\wedge$ -подалгебри на алгебрите од дадено многубразие да биде многубразие.

Ќе ја докажеме следнава последица на теоремата за сместување.

ПОСЛЕДИЦА. Нека $\Theta^\wedge$ е подмножество од Ω_X, а Σ множество идентитети од тип Ω такво што е задоволен следниов услов:

($\ddagger\ddagger$) | Ако $\xi = \xi[y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_m] \in \Omega_X$ и ако постојат $\alpha^\wedge$, $\beta^\wedge \in \Theta_{\hat{X}}$ такви што $\Sigma \vDash \xi[y_1, \ldots, \alpha^\wedge, \ldots, y_m] = \beta^\wedge$, тогаш постои $\gamma^\wedge \in \Theta_{\hat{X}}$ таков што $\Sigma \vDash \xi = \gamma^\wedge$.

Тогаш класата $\Theta^\wedge$-подалгебри на алгебрите од многубразието Σ^* е исто така многубразие.

Доказ. На секој збор $\rho^\wedge = \rho^\wedge [z_1, \ldots, z_m]$ му придружуваме n-арен оператор ρ, каде што n е бројот на различни члена во низата $z_1 \ldots z_m$, и пресликување $\rho' : i \to \rho'(i)$ од $\{1, \ldots, m\}$ во $\{1, \ldots, n\}$ на следниов начин:

Ако $j \in \{1, \ldots, m\}$ и ако i е најмалиот број со особината $z_i = z_j$, тогаш $\rho'(j) = i$.

Да го означиме со Θ множеството од сите така добиени оператори ρ.

Ставајќи $\rho^* = \rho^\wedge$ за секој $\rho \in \Theta$, можеме да дефинираме претставување $^\wedge$ од Θ во Σ со помош на **0.3.** (i) и (ii).

Јасно е дека една алгебра $A(\Theta)$ е $(\Theta, ^\wedge)$-подалгебра на алгебра $B(\Omega)$ од тип Ω, акко A е $\Theta^\wedge$-подалгебра од $B(\Omega)$.

Условот ($\ddagger\ddagger$) е всушност условот ($\ddagger$), па добиваме дека Θ-алгебрата $A(\Theta)$ е $(\Theta, ^\wedge)$-подалгебра на алгебра $B(\Omega) \in \Sigma^*$ акко $A(\Theta) \in {}^\wedge\Sigma^*$ каде што

$$\alpha, \beta \in \Theta_X \Rightarrow ((\alpha, \beta) \in {}^\wedge\Sigma \Leftrightarrow \Sigma \vDash \alpha^\wedge = \beta^\wedge).$$

Од ова следува дека класата $\Theta^\wedge$-подалгебри на алгебрите од многубразието Σ^* се совпаѓа со многубразието $^\wedge\Sigma^*$.

3. ПРИМЕРИ

Добиените резултати ќе ги илустрираме со неколку примери. Во првите два примера е исполнет условот ($\ddagger$), а во преостанатите три не е. Но, за разлика од третиот и четвртиот пример, каде не важи заклучокот од вториот дел на теоремата за сместување, во петтиот тој заклучок е задоволен.

3.1. **Претставување на универзални алгебри во полугрупи.** Нека Θ е произволно множество финитарни оператори, а $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_2$, каде што $\Omega_2 = \{\bullet\}$ е едноелементно множество, а $\Omega_0 = \{\rho' \mid \rho \in \Theta\}$ каде што $\rho \to \rho'$ е биекција од Θ во Ω_0. Ако ставиме

$$*: \rho \to \bullet^n \; \rho' \, x_1 \, x_2 \ldots x_n, \; \rho \in \Theta_n,$$

добиваме пресликување од Θ во Ω_x. Потоа, со помош на тоа пресликување се дефинира пресликување$\hat{}$: $\alpha \to \alpha\hat{}$ од Θ_X во Ω_X. Ако ставиме $\Sigma = \{(*|x_1 \; x_2 \, x_3, \; *x_1 \, {}^*x_2 \, x_3)\}$, добиваме дека Σ^* е многуобразието полугрупи со фамилија фиксни елементи Ω_0. Лесно се покажува дека $\hat{}\Sigma \sqsupset \alpha = \beta$ акко $\alpha = \beta$, а и дека е исполнет условот ($\ddagger$). Според тоа секоја Θ-алгебра е $(\Theta, \hat{}\,)$-подалгебра на полугрупа (со фамилија фиксни елементи). (Директни докази на овој резултат можат да се најдат во [1] или [10]).

3.2. *n*-**полугрупи**. Нека $\Theta = \{\rho\}$ се состои од еден n-арен, а $\Omega = \{\bullet\}$ од еден бинарен оператор. Ако ставиме:

$$*: \rho \to \bullet^n \, x_0 \, x_1 \ldots x_n,$$

добиваме претставување од Θ во Ω. Ако Σ^* е многуобразието полугрупи, тогаш е задоволен условот ($\ddagger$) и $A(\rho) \in \Sigma^*$ акко во $A(\rho)$ се точни следниве идентитети:

$$\rho\rho x_0 \ldots x_{2n} = \rho x_0 \, \rho x_1 \ldots x_{2n} = \ldots = \rho x_0 \ldots x_{2n-1} \, \rho x_n \ldots x_{2n},$$

т.е. $\hat{}\Sigma^*$ се состои од класата n-полугрупи. Според тоа: секоја n-полугрупа е n-потполугрупа на полугрупа. (Директни докази на овој резултат можат да се најдат во [5] или [6]).

3.3. **Асоцијативи**. Нека $\Theta = \{\rho, \tau\}$ се состои од тернарен (ρ) и квартарен (τ) оператор и нека $\Omega = \{\bullet\}$ има само бинарен оператор. Ако ставиме

$$*: \rho \to \bullet^2 \, x_0 \, x_1 \, x_2, \;\; \tau \to \bullet^3 \, x_0 \, x_1 \, x_2 \, x_3,$$

добиваме претставување од Θ во Ω. Ако Σ^* е многуобразието полугрупи, тогаш:

$$\hat{}\Sigma \sqsupset \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha = \alpha\,[y_1, \ldots, y_m], \; \beta = \beta\,[y_1, \ldots, y_m],$$

т.е. $\hat{}\Sigma^*$ се состои од сите $\{2, 3\}$-асоцијативи ([7]). Условот ($\ddagger$) во овој случај не е исполнет, бидејќи, на пример,

$$\Sigma \sqsupset \bullet \, x_1 \, \rho\hat{} \; [x_2, x_3, x_4] = \tau\hat{} \; [x_0, x_1, x_2, x_3],$$

но не постои $\gamma\hat{} \in \Theta\hat{}$ таков што $\Sigma \sqsupset \bullet \, x_1 \, x_2 = \gamma\hat{}$.

Да ја разгледаме алгебрата $A(\rho, \tau)$, каде $A = \{a, b, c\}$, а ρ и τ се дефинирани со:

$$\rho\, xyz = a,\ xyzu \neq cccc \Rightarrow \tau\, xyzu = a,\ \tau\, cccc = b.$$

Лесно се проверува дека $A(\rho, \tau) \in {}^{\wedge}\Sigma^*$, но и дека $A(\rho, \tau)$ не е $(\Theta, {}^{\wedge})$-подалгебра на полугрупа. Имено, ако $B(\bullet)$ е полугрупа, за која $A(\rho, \tau)$ е $(\Theta, {}^{\wedge})$-потполугрупа, би имале:

$$b = \tau\, c\, c\, c\, c = \bullet\ c\, c\, c\, c = \bullet\, c\, \bullet^2 c\, c\, c = \bullet\, c\, \rho\, c\, c\, c = \bullet\, c\, a =$$

$$= \bullet\, c\, a = \bullet\, c\, \rho\, a\, a\, a = c\, a\, a\, a = a.$$

3.4 **Потполугрупи на групи**. Нека $\Omega = \{e\}$, $\Omega_1 = \{{}^{-1}\}$, $\Omega_2 = \{\bullet\}$ и $\Sigma = \{(\bullet\, x_1\, e, x_1), (\bullet\, x_1\, x_1^{-1}, e), (\bullet\, \bullet\, x_1\, x_2\, x_3, \bullet\, x_1\, \bullet\, x_2\, x_3)\}$, т.е. ${}^{\wedge}\Sigma^*$ е многуобразието групи. Ако $\Theta = \{o\}$ се состои само од еден бинарен оператор и ако ставиме

$$*:\ o\, x\, y \rightarrow \bullet\, x\, y,$$

добиваме претставување од Θ во Ω, при што ${}^{\wedge}\Sigma^*$ е многуобразието полугрупи. јасно е дека постојат полугрупи $A(o)$ што не се потполугрупи на групи. Од ова следува дека условот (⌗) не е исполнет. Навистина, имаме:

$$\Sigma \sqsubset \xi\, [x_1, x_2, x_3, x_3] = \alpha^{\wedge}\ [x_1, x_2]^{\alpha},$$

каде што $\xi\, [x_1, x_2, x_3, x_4] = \bullet^3\, x_1\, x_2\, x_3^{-1}\, x_4$, $\alpha\, [x_1, x_2] = \bullet\, x_1\, x_2$, но не постои $\gamma \in \Theta_X$ таков што

$$\Sigma \sqsubset \xi\, [x_1, x_2, x_3, x_4] = \gamma^{\wedge},$$

каде што $x_4 \neq x_3$.

3.5. **Сместување полугрупи во прстени**. Нека $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ каде што $\Omega_0 = \{0\}$, $\Omega_1 = \{-\}$ и $\Omega_2 = \{+, .\}$, а Σ^* нека е класата Ω-алгебри што се прстени. Потоа нека $\Theta = \{\bullet\}$ се состои од само еден бинарен оператор и нека ставиме:

$$*:\ \bullet\, x\, y \rightarrow x + y - x\, y, \tag{3.5.1}$$

при што Ω-зборовите ги пишуваме на обичниот начин, т.е. $x + y - x\, y$ се пишува наместо $+\ +\ x\, y - x\, y$. Лесно се покажува дека претставувањето ${}^{\wedge} : \Theta_X \rightarrow \Theta_X$ дефинирано со помош на (3.5.1.) го има следниов облик

$$(\alpha\, [x_1, x_2, \ldots, x_n])^{\wedge} = x_1 + \ldots + x_n - (x_1\, x_2 + \ldots + x_{n-1}\, x_n) + \\ + \ldots + (-1)^n\, x_1\, x_2 \ldots x_n. \tag{3.5.1}$$

Лесно се проверува исто така дека $^\wedge\Sigma^*$ е многуобразието полугрупи. Во работата [8] е покажано дека секоја полугрупа $A(\bullet)$ е $(\Theta, ^\wedge)$-подалгебра на асоцијативен прстен. Подолу ќе покажеме дека условот ($\#$) не е исполнет. Навистина, ако $\xi = x + y - x\,y - x + x$, тогаш имаме $\xi \eqqcolon \xi = \alpha^\wedge$ каде што $\alpha = \bullet\, x\,y$, но ако $z \neq y$, тогаш не постои $\gamma \in \Theta_X$ таков што $\Sigma \eqqcolon y - x\,y + z = \gamma^\wedge$, бидејќи кога би имале $\gamma = \gamma[x_1, ..., x_n]$, прво, според (3.5.2.), добиваме $n = 2$, а потоа и $z = x_1 = x$, $x_2 = y$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. M. Cohn, Universal algebra, New York 1965.

[2] Ѓ. Чупона и Б. Трпеновски, Предавања по алгебра кн. II, Скопје 1973.

[3] M. D. Radojčić, On the embedding of universal algebras in groupoids holding the law *xyozuoo=xzoyuoo*, Matem. vesnik 5 (20) 3 (1968) 352—366.

[4] Ю. К. Ребане, О представлении универсальных алгебр в коммутативных полугруппах, Сиб. мат. журн. 7 (1966) 878—885.

[5] Ѓ. Чупона, за асоцијативните конгруенции, Билтен на ДМФ СРМ кн. 13 (1962).

[6] ———— Полугрупи генерирани од асоцијативи, Год. зборн. ПМФ Скопје секц. A, кн. 15 (1964) 5—22.

[7] ———— За асоцијативите, МАНУ, прилози I 1, Одд. прир. мат. науки 9—20.

[8] ———— За квазипрстените, Билтен на ДМФ СРМ, Скопје кн. 20 (1969), 19—22.

[9] ———— Подалгебри на полугрупи, Билтен на ДМФ СРМ, кн. 19 (1968) 9—22.

[10] G. Čupona, On some primitive classes of universal algebras. Matematički vesnik 3 (18) (1966) 105—108.

G. Čupona and S. Markovski

ON REPRESENTATIONS OF UNIVERZAL ALGEBRAS

(S u m m a r y)

This paper gives a sufficient condition for a derived category of a variety ([1], p. 182) to be a variety. Some examples of derived categories are considered; one of them shows that our condition is not necessary for a derived category of a variety to be a variety.

1. PRELIMINARIES

(i) Words and varieties. Let Ω be a set of finitary operators, and **X** an infinite countable set of free variables, such that $X \cap \Omega = \emptyset$. Denote by Ω_X the set of Ω-words on X. (Thus: $X \cup \Omega \subseteq \Omega_X$ and if $\omega \in \Omega_n$, $\xi_1, ..., \xi_n \in \Omega_X$ then $\xi = \omega\xi_1 ... \xi_n \in \Omega_X$.) If $\xi \in \Omega_X$ and $x_1\, x_2 \ldots x_m$ is the sequence of free variables which is obtained from ξ by omitting all operator symbols, then we write $\xi = \xi\,[x_1 \ldots, x_m]$. And, if $\zeta_1\, \zeta_2 \ldots \zeta_m$ is any sequence of m members, then $\xi[\zeta_1, \ldots, \zeta_m]$ is the sequence which is obtained from ξ by replacinq

x_ν by ζ_ν. In general, $\eta = \xi [\zeta_1, \ldots, \zeta_m]$ is not an Ω-word, but if $\zeta_1, \ldots, \zeta_m \in \Omega_X$ then $\eta \in \Omega_X$.

Let $A(\Omega)$ be an Ω-algebra. If $\xi[x_1, \ldots, x_m] \in \Omega_X$ and $a_1, \ldots, a_m \in A$ then $\xi[a_1, \ldots, a_m]$ has a uniquely defined value $a \in A$. In the following this element a of A shall be also denoted by $\xi[a_1, \ldots, a_m]$.

If $\Sigma \subseteq \Omega_X \times \Omega_X$ then the variety of Ω-algebras $A(\Omega)$ on which $\xi = \eta$ is an identity for each $(\xi, \eta) \in \Sigma$ is denoted by Σ^*. (We say that $\xi[x_1, \ldots, x_m] = \eta[y_1, \ldots, y_k]$ is an identity on $A(\Omega)$ if for any sequence $a_1 \ldots a_m b_1 \ldots b_n$ of elements of A which is subordinate to the sequence $x_1, \ldots x_m y_1 \ldots y_k$ of free variables, we have $\xi [a_1, \ldots, a_m] = \eta [b_1, \ldots, b_k]$. And, if $\xi_1 = \eta_1$ is an identity on any algebra $A(\Omega) \in \Sigma^*$ then we write $\Sigma \vDash \xi_1 = \eta_1$.

(ii) **Representations.** Let Θ and Ω be two sets of finitary operators and $^*: \rho \to \rho^*$ a mapping from Θ into Ω_X. If $\rho \in \Theta_n$ and $\rho^* = \rho^*[x_1, \ldots, x_m]$ $(x_\nu \in X)$ then let $\rho': i \to \rho'(i)$ be a mapping from $\{1, \ldots, m\}$ into $\{1, \ldots n\}$. A mapping $^\wedge: \alpha \to \alpha^\wedge$ from Ω_X into Ω_X can be defined in the following way:

(ii.1) $x^\wedge = x$, for each $x \in X$

(ii.2) If $\rho \in \Theta_n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Theta_X$ and $\alpha = \rho\alpha_1 \ldots \alpha_n$, then

$$\alpha^\wedge = \rho^*[\alpha^\wedge{}_{\rho'(1)}, \ldots, \alpha^\wedge{}_{\rho'(m)}].$$

We say that $^\wedge$ is the representation of Θ into Ω induced by $((^*, \rho') | \rho' \in \Theta)$.

Let $\alpha \in \Theta_X$ and

$$\alpha = \alpha [x_1, \ldots, x_k], \ \alpha^\wedge = \alpha^\wedge \ [y_1 \ldots, y_s]. \tag{1}$$

A mapping $\alpha': \{1, \ldots, s\} \to \{1, \ldots, k\}$ can be defined by:

(ii.3) $\alpha'(1) = 1$ if $\alpha = x$.

(ii.4) Let $\alpha = \rho\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$, $\rho^* = \rho^* [z_1 \ldots z_m]$, and $\alpha_\nu': \{1, \ldots s_\nu\} \to \{1, \ldots, k_\nu\}$: then we have $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, and $s = s_{\rho'(1)} + \ldots + s_{\rho'(m)}$. If $j \in \{1, \ldots, s\}$ and $j = s_{\rho'(1)} + \ldots + s_{\rho'(\nu-1)} + i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, then we put $\alpha'(j) = \alpha'_{\rho'(\nu)}(i)$.

If (1) is satisfied and if $\zeta_1 \ldots \zeta_k$ is any sequence of k members then instead of $[\zeta_{\alpha'(1)}, \ldots, \zeta_{\alpha'(k)}]$ we shall write $[\zeta_1, \ldots, \zeta_k]^\alpha$. Thus $\alpha^\wedge [y_1, \ldots y_s] = \alpha^\wedge [x_1, \ldots, x_k]^\alpha$.

Let Σ be a subset of $\Omega_X \times \Omega_X$, and define a subset $^\wedge\Sigma$ of $\Theta_X \times \Theta_X$ by:

$$(\alpha, \beta) \in {}^\wedge\Sigma \Leftrightarrow \Sigma \vDash \alpha^\wedge = \beta^\wedge. \tag{2}$$

The variety $^\wedge\Sigma^*$ of Θ-algebras is said to be induced by Σ^* and the represantion $^\wedge$.

An algebra $A(\Theta)$ is said to be a $(\Theta, ^\wedge)$-subalgebra o an algebra $B(\Omega)$ if $A \subseteq B$ and:

$$\alpha [a_1, \ldots a_k] = \alpha^\wedge \ [a_1, \ldots, a_k]^\alpha \tag{3}$$

for any sequence $a_1 \ldots a_k$ of elements of A.

2. AN EMBEDDING THEOREM

The following embedding theorem is the main result of this paper.

THEOREM. Let Θ and Ω be two sets of finitary operators, $\hat{}$ a representation from Θ into Ω, Σ^* a variety of Ω-algebras and $\hat{}\,\Sigma^*$ the corresponding induced variety of Θ-algebras. Assume also that the following condition is satisfied:

$$(\#)\quad \left|\begin{array}{l} \text{If } \xi = \xi\,[x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m] \in \Omega_X \text{ and } \alpha, \beta \in \Theta_X \text{ are such} \\ \text{that } \Sigma \vDash \xi\,[x_1, \ldots, \alpha^{\wedge}, \ldots, x_m] = \beta^{\wedge} \text{ then there exists a} \\ \gamma \in \Theta_X \text{ such that } \Sigma \vDash \xi = \gamma^{\wedge}. \end{array}\right.$$

Then, an algebra $A(\Theta)$ is a $(\Theta, \hat{}\,)$-subalgebra of an algebra $B(\Omega) \in \Sigma^*$ iff $A(\Theta) \in \hat{}\,\Sigma^*$.

Proof. 1) Clearly, if $A(\Theta)$ is a $(\Theta, \hat{}\,)$-subalgebra of an algebra $B(\Omega) \in \Sigma^*$, then $A(\Theta) \in \hat{}\,\Sigma^*$.

2) Let $A(\Theta) \in \hat{}\,\Sigma^*$. Denote by $F_A(\Omega)$ the algebra of the variety Σ^* which is freely generated by the set A. Thus each element $t \in F_A$ has a form $t = \xi\,[a_1, \ldots, a_m]$ where $\xi\,[x_1, \ldots, x_m] \in \Omega_X$, $a_1, \ldots a_m \in A$, and

$$\xi\,[a_1, \ldots, a_m] = \eta\,[b_1, \ldots, b_p]$$

iff

$$\Sigma \vDash \xi\,[x_1, \ldots, x_m] = \eta\,[y_1, \ldots y_p]$$

for any sequence $x_1 \ldots x_m\ y_1 \ldots y_p$ of free variables which is isomorfic to the sequence $a_1, \ldots a_m\ b_1 \ldots b_p$.

If Σ^* is a trivial variety, i. e. if $\Sigma \vDash \xi = \eta$ for any $\xi, \eta \in \Omega_X$, then $\hat{}\,\Sigma^*$ is also trivial, and the conclusion of the theorem is obvious.
Therefore we may assume that Σ^* is non-trivial, and then:

$$a, b \in A,\ a \neq b \text{ in } A \Rightarrow a \neq b \text{ in } F_A, \tag{4}$$

i. e. A may be considered as a subset of F_A.

Let $t = \xi\,[\ldots, a_i, \ldots] \in F_A$, $a_i = \alpha\,[b_1, \ldots, b_k]$ in $A(\Theta)$, and $s = \xi\,[\ldots, \alpha^{\wedge}\,[b_1 \ldots b_k]^{\alpha}, \ldots]$; then we write $t \vdash s$, and $s \dashv t$. Denote by $\vdash\!\dashv$ the transitive product of $\vdash$ and $\dashv$. It can be easily seen that $\vdash\!\dashv$ is a congruence of $F_A(\Omega)$, and denote by $B(\Omega)$ the corresponding factor algebra.

Put

$$A^{\vdash\dashv} = \{a^{\vdash\dashv} \mid a \in A\} \tag{5}$$

where $a^{\vdash\dashv}$ is the equivalence class containing a. Clearly, $A^{\vdash\dashv}(\Theta)$ is a $(\Theta, \hat{}\,)$-subalgebra of $B(\Omega)$ where

$$\alpha[a_1^{\vdash\dashv}, \ldots a_k^{\vdash\dashv}] = (\alpha^{\wedge}\,[a_1, \ldots a_k]^{\alpha})^{\vdash\dashv}$$

for any Θ-word $\alpha [x_1, \dots, x_k] \in \Theta_X$ and $a_1, \dots a_k \in A$; and the mapping

$$nat \vdash\!\dashv : a \to a^{\dashv}$$

is an epimorfism from $A(\Theta)$ into $A^{\vdash\dashv}(\Theta)$.

Thus, the proof will be completed if we show that:

$$a, b \in A \Rightarrow \{a \vdash\!\dashv b \Leftrightarrow a = b\}. \tag{6}$$

The statement (6) is a corollary of the following lemmas, where it is assumed that $a, b \in A$, $s, t \in F_A$.

L. 1. $a \vdash t \Leftrightarrow t = \alpha^\wedge [a_1, \dots, a_k]^\alpha$, $a = \alpha [a_1, \dots, a_k]$ in $A(\Theta)$, for some $\alpha = \alpha [x_1, \dots, x_k] \in \Theta_X$, $a_1, \dots a_k \in A$.

L. 2. $t \vdash a \Rightarrow a \vdash t$.

L.3. $a \vdash t$, $t \vdash s \Rightarrow a \vdash s$.

L.4. $a \vdash t, s \vdash t \Rightarrow a \vdash s$.

L.5. $a \vdash b \Rightarrow a = b$.

Assume now that $a \vdash\!\dashv b$, where $a, b \in A$. Then there exist $t_1, \dots t_r \in F_A$ such that $a \Box t_1 \Box \dots \Box t_k \Box b$, where $\Box$ is $\vdash$ or $\dashv$. By **L.2** — **L.4.** we have $a \vdash b$ and by **L.5.**, finally, $a = b$.

This completes the proof.

We notice that the conditioin ($\#$) is used in the proofs of the lemmas. For example, let us give the proof of Lemma 4.

Since $a \vdash t$, by **L.1.**, there exists $\alpha \in \Theta_X$ such that

$$a = \alpha [a_1, \dots a_m] \text{ in } A(\Theta), \; t = \alpha^\wedge [a_1, \dots, a_m]^\alpha \text{ in } F_A. \tag{7}$$

It follows from $s \vdash t$ that t and s can be represented in the forms

$$\begin{aligned} s &= \xi [b_1, \dots, b_i, \dots b_n] \\ t &= \xi [b_1, \dots, \beta^\wedge [c_1, \dots c_k]^\beta, \dots b_n] \end{aligned} \tag{8}$$

where

$$b_i = \beta[c_1, \dots, c_k] \text{ in } A(\Theta).$$

Because of

$$\alpha^\wedge [a_1, \dots, a_m]^\alpha = \xi [b_1, \dots, \beta^\wedge [c_1, \dots, c_k]^\beta, \dots, b_n]$$

we have

$$\Sigma \rightleftharpoons \alpha^\wedge [x_1, \dots, x_m]^\alpha = \xi [y_1, \dots, \beta^\wedge [z_1, \dots z_k]^\beta, \dots y_n] \tag{9}$$

where $x_1, \dots x_m' y_1 \dots z_1 \dots z_k \dots y_n$ is a sequence of free variables isomorphic with $a_1 \dots a_m b_1 \dots c_1 \dots c_k \dots b_n$. Using condition (#) we conclude that there exists $\gamma [u_1, \dots, u_p] \in \Theta_X$ such that

$$\Sigma \models \gamma^\wedge [u_1, \dots, u_p]^\wedge = \xi [y_1, \dots, y, \dots, y_n] \tag{10}$$

where y is a free variable different from $y_1, \dots, y_n$. Assuming $u_{j_1} = \dots u_{i_q} = y$' by (9) and (10), we obtain:

$$\begin{aligned} \Sigma \models \gamma^\wedge [\dots, \beta^\wedge [z_1, \dots, z_k]^\beta, \dots \beta^\wedge [z_1, \dots z_k]^\beta, \dots] = \\ = \xi [y_1, \dots, \beta^\wedge [z_1, \dots, z_k]^\beta, \dots, y_n] \\ = \alpha^\wedge [x_1, \dots, x_m]^\alpha, \end{aligned} \tag{11}$$

i. e.

$$^\wedge \Sigma \models \gamma [\dots, \beta [z_1, \dots, z_k], \dots, \beta [z_1, \dots, z_k], \dots] = \alpha [x_1, \dots x_m]. \tag{12}$$

Finally, by (7), (8), and (12) we obtain:

$$\gamma [\dots, b_i, \dots b_i, \dots] = \alpha [a_1, \dots a_n] = a, \tag{13}$$

and

$$s = \gamma^\wedge [\dots, b_i, \dots, b_i, \dots]^\gamma$$

i. e. $a \vdash s$, which completes the proof of Lemma 4.

3. EXAMPLES

Here we consider five examples of representations and in each of them we assume that $x_1, x_2, \dots$ are different free variables.

3.1. $\Omega = \Omega_2 = \{\bullet\}$, $\Theta = \Theta_{n+1} = \{\circ\}$

$$* : \circ \to \bullet^n x_0\ x_1 \dots x_n,\ \circ' (i) = i.$$

If Σ^* is the vartiety of semigroups then (#) is satisfied, and $^\wedge \Sigma^*$ is the variety of n-semigroups. Thus: each n-semigroup $A(\circ)$ is an n-subsemigroup of a semigroup $S(\bullet)$ ([5] or [6]).

3.2. $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_2$ where $\Omega_2 = \{\bullet\}$, and $\Omega_0 = \{\omega_\rho | \rho \in \Theta\}$, where $\rho \to \omega_\rho$ is a bijection from Θ, into Ω_0.

$$* : \rho \to \bullet^n \omega_\rho\ x_1 \dots x_n,\ \rho'(i) = i$$

for each $\rho \in \Theta_n$. If Σ^* is the variety of semigroups with a collection Ω_0 of constants, then $^\wedge \Sigma^*$ is the variety of all Θ-algebras, and (#) is satisfied. Therefore, each Θ-algebra $A(\Theta)$ can be embedded in a semigroup $S(\bullet)$ such that:

$$\rho x_1 \dots x_n = \bullet^n \omega_\rho x_1, \dots x_n,\ \rho \in \Theta_n \qquad ([1]).$$

where $\{\omega_\rho | \rho \in \Theta)$ is a collection of constants of S. ([1)].

3.3. $\Theta = \Theta_2 = \{o\}$, $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ where $\Omega_0 = \{e\}$, $\Omega_1 = \{^{-1}\}$ and $\Omega_2 = \{\cdot\}$.

$$* : o \to \cdot\ xy.$$

If Σ^* is the variety of groups then $^\wedge\Sigma^*$ is the variety of semigroups. The condition ($\#$) is not satisfied, for there exist semigroups which are not subsemigroups of groups. (As it is well known the class of subsemigroups of groups is not a variety).

3.4. $\Theta = \Theta_3 \cup \Theta_4$, where $\Theta_3 = \{\rho\}$, $\Theta_4 = \{\tau\}$, $\Omega = \Omega_2 = \{\bullet\}$.

$$* : \rho \to \bullet^2\, x_1 x_2 x_3,\ \tau \to \bullet^3\, x_1 x_2 x_3 x_4,$$

$$\rho'(i) = i,\ \tau(j) = j.$$

If Σ^* is the variety of semigroups then

$$^\wedge\Sigma \models \xi = \eta \Leftrightarrow \xi = \xi\,[x_1, \ldots, x_n],\ \eta = \eta\ [x_1, \ldots x_n].$$

The condition ($\#$) is not satisfied, and there exist algebras in the varitey $^\wedge\Sigma^*$ which are not ($\Theta, ^\wedge$)-subalgebras of semigroups.

3.5. Let $\Theta = \{o\} = \Theta_2$, and Σ^* be the vartety of associative rings. Denote Ω-words in the usual manner.

A representation $^\wedge$ is defined by

$$* : o \to x_1 + x_2 - x_1 x_2,\ o'(1) = o'(3) = 1,\ o'(2) = o'(4) = 2.$$

Then:

$$(\alpha\,[x_1, \ldots, x_k])^\wedge = x_1 + \ldots + x_k - (x_1 x_2 + \ldots + x_{k-1} x_k) +$$
$$+ (x_1 x_2 x_3 + \ldots + x_{k-2} x_k) + \ldots + (-1)^k\ x_1 x_2 \ldots x_k.$$

The induced variety $^\wedge\Sigma^*$ is the variety of semigroups. It is known ([8]) that each semigroup is a ($\Theta, ^\wedge$)-subalgebra of an associative ring, but in this case condition ($\#$) is not satisfied.