

Г. Чуйона

М-АСОЦИЈАТИВИ ВО КОИ НЕКОИ ЛЕВИ ИДЕАЛИ СЕ М-ПОДГРУПИ

Целта на оваа работа е да се даде опис на класата асоцијативи определена со насловот, а со тоа се обопштуваат резултатите од работите [1] и [6]. Прво се изнесуваат неопходните претходни дефиниции и формулира главниот резултат на работава, а потоа истиот докажува во неколку етапи.

О. Претходни дефиниции и формулирање на основниот резултат

Нека A е непразно множество, M непразно множество од природни броеви, и за секој елемент $n \in M$ нека е определена една $n + 1$ -тарна операција:

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \rightarrow (a_0 a_1 \dots a_n) \quad (1)$$

во A . Во алгебрајта A се воведува поимот за сложен $\bar{\mu}$ производ на вообичаениот начин. Имено, за секој елемент $a \in A$ се става:

$$\Pi(a) = a \quad (2)$$

и се вели дека Π е $\bar{\mu}$ производ од нулти рег. Потоа, ако $n \in M$, и ако:

$$a_0 = \Pi_0(a_{00} a_{01} \dots a_{0k_0}), a_1 = \Pi_1(a_{10} \dots a_{1k_1}), \dots, a_n = \Pi_n(\dots a_{nk_n}),$$

тогаш производот:

$$\Pi = (\Pi_0 \Pi_1 \dots \Pi_n) \quad (3)$$

се определува со:

$$\Pi(a_{00} \dots a_{0k_0} \dots a_{n0} \dots a_{nk_n}) = (a_0 a_1 \dots a_n). \quad (4)$$

Ако притоа производите $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_n$ имаат *регови* соодветно r_0, r_1, \dots, r_n , тогаш за Π ќе велиме дека има *рег* $1 + r_0 + r_1 + \dots + r_n$.

Да уочиме дека ако $\Pi(b_0 b_1 \dots b_k)$ е сложен производ во алгебрата A тогаш k може да се претстави како збир $k = n_1 + n_2 + \dots + n_r$, каде што $n_1, n_2, \dots, n_r \in M$.

За алгебрата A велíme дека е M -асоцијатив, ако

$$\Pi'(a_0 a_1 \dots a_k) = \Pi''(a_0 a_1 \dots a_k),$$

за било кои елементи $a_0, a_1, \dots, a_k \in A$ и производи Π', Π'' , т.е. ако важи општиот асоцијативен закон. Во тој случај, имајќи предвид дека производот $\Pi(a_0 a_1 \dots a_k)$ е еднозначно определен со низата $a_0, a_1, \dots, a_k \in A$, ќе пишуваме:

$$\Pi(a_0 a_1 \dots a_k) = (a_0 a_1 \dots a_k). \quad (5)$$

Ако A е M -асоцијатив и ако сите елементи од M се делат со m при што $m \in M$, тогаш велíme дека A е m -асоцијатив.

За M -асоцијативот A велíme дека е M -идуа, ако

$$(\forall n \in M) (\forall a_1, \dots, a_n \in A) (A a_1 \dots a_n) = (a_1 \dots a_n A) = A. \quad (6)$$

Подмножеството B од асоцијативот A се вика лев идеал ако

$$(\forall n \in M) (A A \dots A B) = (A^n B) \subseteq B. \quad (7)$$

Потребен ни е и поимот за делумен M -асоцијатив. Имено, A е делумен M -асоцијатив, ако за секој $n \in M$, во A е определена делумна $n + 1$ -тарна операција (...) така што важи општиот асоцијативен закон, кој што сега гласи: Ако еден од производите $\Pi'(a_0 \dots a_k)$, $\Pi''(a_0 \dots a_k)$ постои, тогаш постои и другиот и тие се еднакви.

Ако A е M_1 -асоцијатив, а B M_2 -асоцијатив, при што $M_1 \subseteq M_2$, тогаш за пресликувањето $\varphi: A \rightarrow B$ велíme дека е хомоморфизам, ако:

$$(\forall n \in M_1) (\forall a_0, \dots, a_n \in A) (a_0 \dots a_n) \varphi = (a_0 \varphi \dots a_n \varphi). \quad (8)$$

Како што е во обичај, полуидуа од трансформации на едно множество J ќе ја означуваме со T_J .

Сега ќе го формулираме главниот резултат на работава.

ТЕОРЕМА. (I) Нека M е множество природни броеви, а m делишел на сите природни броеви што припаѓаат на M . Пошто, нека G е идуа, J нејразно множество, P делумен M -асоцијатив, и нека $\varphi: P \rightarrow P\varphi$ е хомоморфизам од P во G , а $\xi: P \rightarrow T_J$ од P во T_J , иако што ако $n \in M$ и $(p_0 p_1 \dots p_n)$ не е определен во P , тогаш $\xi_{p_0} \xi_{p_1} \dots \xi_{p_n}$ е константа. Исти така претпоставуваме дека $G \times J \cap P = \emptyset$. Нека сѐ направиме $A = G \times J \cup P$ и нека ги прошириме φ и ξ така што:

$$(\forall x \in G, i, j \in J) (x, i) \varphi = x, j \xi_{(x,i)} = i. \quad (9)$$

Во A о̀п̀ределуваме „производ“ $(a_0 a_1 \dots a_n)$ за секои $a_0, a_1, \dots, a_n \in A$ и $n \in M$ на следниов начин:

$$(i) p = (a_0 a_1 \dots a_n) \text{ во } P \Rightarrow p = (a_0 a_1 \dots a_n) \text{ во } A; \quad (10)$$

(ii) ако $(a_0 a_1 \dots a_n)$ не е о̀п̀ределен во P , то̀гаш во A то̀ј се о̀п̀ределува со:

$$(a_0 a_1 \dots a_n) = ((a_0 \varphi a_1 \varphi \dots a_n \varphi), i \xi_{a_0} \xi_{a_1} \dots \xi_{a_n}), \quad (11)$$

каде што i е произволен елемент од J .

Добиената алгебра A ќе ја означуваме со $[G, J; P; \varphi, \xi]$; таа има следниве две особини:

1) $[G, J; P; \varphi, \xi]$ е M -асоцијатив;

2) За секој $i \in J$, множеството $G_i = \{(x, i) \mid x \in G\}$ е лев идеал и M -подгрупа на A , а освен тоа секој лев идеал што е и M -подгрупа е од облик G_j за некој $j \in J$.

(II) Нека A е M -асоцијатив, при што t е најголемиот заеднички делител на елементите од M . Ако некој лев идеал на A е и M -подгрупа, то̀гаш A е изоморфен со M -асоцијатив од облик $[G, J; P; \varphi, \xi]$.

Доказот на теоремата ќе го спроведеме во неколку етапи.

1. Доказ на првиот дел од теоремата

За да покажеме дека со (i) и (ii) е определена алгебра, треба да покажеме дека десната страна на (11) не зависи од изборот на елементот $i \in J$. Ако $a_0, \dots, a_n \in P$ тоа следува од фактот што тогаш трансформацијата $\xi_{a_0} \xi_{a_1} \dots \xi_{a_n}$ е константа. Да претпоставиме дека барем еден од елементите a_v не е во P , и нека k е најголемиот број таков што $a_k = (x, j) \in G \times J$. Тогаш, според (9) ќе имаме:

$$i \xi_{a_0} \xi_{a_1} \dots \xi_{a_n} = j \xi_{a_{k+1}} \dots \xi_{a_n}, \quad (12)$$

па, значи, добиваме дека десната страна на (11) не зависи од i . (За $k=n$, десната страна на (12) е j).

Ќе покажеме дека добиената алгебра е M -асоцијатив. За таа цел, да претпоставиме дека $b = \Pi (a_0 a_1 \dots a_t)$ е сложен производ во A . Ако $b \in P$, тогаш од (i) и фактот што P е делумен M -асоцијатив, следува дека за произволен друг производ $c = \Pi' (a_0 a_1 \dots a_t)$ имаме $b = c$. Нека $b \notin P$, т.е. $b \in G \times J$. Ќе покажеме дека во овој случај:

$$b = ((a_0 \varphi a_1 \varphi \dots a_t \varphi), i \xi_{a_0} \xi_{a_1} \dots \xi_{a_t}), \quad (13)$$

каде што i е произволен елемент од J . Ако Π има ред 1, тогаш (13) е точно бидејќи се сведува на (11). Нека $t = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, каде што $n_v \in M$ и $k \geq 1$. Тогаш b може да се претстави во облик:

$$b = \Pi'(a_0 \dots a_{r-1} (a_r \dots a_{r+n}) a_{r+n+1} \dots a_t) \quad (13')$$

за некои $r \in N$, $n \in M$ и производ Π' . Сега се можни следниве два случаја:

$$p = (a_r \dots a_{r+n}) \in P \quad (14)$$

или

$$\begin{aligned} (x, j) &= (a_r \dots a_{r+n}) \\ &= ((a_r \varphi \dots a_{r+n} \varphi), i \xi_{a_r} \dots \xi_{a_{r+n}}). \end{aligned} \quad (14')$$

Претпоставуваме дека (13) е точно за производот Π' . Ако е (14) точно тогаш имаме:

$$b = ((a_0 \varphi \dots a_{r-1} \varphi p \varphi \dots a_t \varphi), i \xi_{a_0} \dots \xi_{a_{r-1}} \xi_p \dots \xi_{a_t}), \quad (15)$$

а

$$b = ((a_0 \varphi \dots a_{r-1} \varphi x a_{r+n+1} \varphi \dots a_t \varphi), j \xi_{a_{r+n+1}} \dots \xi_{a_t}) \quad (15')$$

во случајот (14'). Ако се има предвид дека $p \varphi = (a_r \varphi \dots a_{r+n} \varphi)$ во првиот случај, а $x = (a_r \varphi \dots a_{r+n} \varphi)$, во вториот, добиваме дека и во двата случаја десните страни на (15) и (15') се свопаѓаат со десната страна на (13).

Со тоа докажавме дека A е M -асоцијатив.

Јасно е дека $G_i = \{(x, i) | x \in G\}$ е лев идеал и M -подгрупа од A , за секој $i \in J$. Да претпоставиме сега дека L е непразен лев идеал на A . Ако $a \in G_x J$, тогаш $(a^n L) \subseteq L \cap G \times J$, од што следува дека $L \cap G \times J$ е непразно множество. Ако $a \in G_i \cap L$, тогаш $(G_i^n a) = G_i \subseteq L$, од што, ако се претпостави и тоа дека L е M -подгрупа од A , се добива дека $L = G_i$.

Со тоа го комплетиравме доказот на првиот дел од теоремата.

2. Доказ на вториот дел од теоремата

2.1. Случај кога A е m -асоцијатив. Во овој случај теоремата формулирана во работава се сведува на основниот резултат на работата [6].

2.2. Случај кога A е унија на фамилијата леви идеали што се и M -подгрупи. Да претпоставиме сега дека A е M -асоцијатив, $\{G_i | i \in J\}$ фамилија леви идеали на A секој од кои е и M -подгрупа, при што:

$$A = \bigcup_{i \in J} G_i. \quad (16)$$

Јасно е дека $G_i \cap G_j = \emptyset$ или $G_i = G_j$. Затоа ќе претпоставиме дека $G_i \cap G_j = \emptyset$ за $i \neq j$.

Да фиксираме еден елемент $n \in M$ и два елемента $i, j \in J$. Ако e_1, e_2, \dots, e_n е неутрален слог на n -групата G_j , т.е. ако

$$(\forall x \in G_i) (x e_1 e_2 \dots e_n) = x, \quad (17)$$

тогаш со:

$$(\forall y \in G_j) y \varphi_{ji} = (y e_1 e_2 \dots e_n) \quad (18)$$

е определен изоморфизам од n -групата G_j во n -групата G_i ([5] теорема 1). Да претпоставиме сега дека k е произволен елемент од M , и дека $x_0, x_1, \dots, x_k \in G_j$. Тогаш имаме:

$$\begin{aligned} (x_0 x_1 \dots x_k) \varphi_{ji} &= (x_0 x_1 \dots x_k e_1 e_2 \dots e_n) \\ &= x_0 x_1 \dots x_{k-1} x_k \varphi_{ji} \\ &= (x_0 x_1 \dots x_{k-1} (e_1 e_2 \dots e_n x_k \varphi_{ji})) \\ &= (x_0 x_1 \dots x_{k-1} \varphi_{ji} x_k \varphi_{ji}) = \dots \\ &= (x_0 \varphi_{ji} x_1 \varphi_{ji} \dots x_{k-1} \varphi_{ji} x_k \varphi_{ji}), \end{aligned}$$

од што следува дека φ_{ji} е изоморфизам од M -асоцијативот G_j во M -асоцијативот G_i . Да забележиме исто така и дека:

$$\varphi_{ji} \varphi_{ir} = \varphi_{jr}. \quad (19)$$

Да земеме сега i_0 да е фиксен елемент од J и да ставиме $G = G_{i_0}$. Го формираме M -асоцијативот $B = G \times J$, така што

$$((x_0, j_0) (x_1, j_1) \dots (x_n, j_n)) = ((x_0 x_1 \dots x_n), j_n), \quad (20)$$

за секои $x_v \in G$, $n \in M$, $j_v \in J$. Лесно се проверува дека пресликувањето ψ определено со:

$$(\forall x \in G_i) x \psi = (x \varphi_{ii_0}, i) \quad (21)$$

е изоморфизам од A на $B = G \times J$. Затоа, можеме да претпоставиме дека:

$$A = G \times J \quad (22)$$

Нека m е најголемиот заеднички делител на природните броеви што припаѓаат на M . Ако се има предвид фактот што G е M -група и теоремата 2 од работата [4] (стр. 8) заклучуваме дека постои $m + 1$ -тарна операција:

$$(x_0, x_1, \dots, x_m) \rightarrow x_0 x_1 \dots x_m \quad (23)$$

во G , таква што G во однос на неа е m -група и притоа:

$$(\forall n \in M, x_v \in G) (x_0 x_1 \dots x_n) = x_0 x_1 \dots x_n. \quad (24)$$

(Десната страна на (24) е осмислена, бидејќи m е делител на n).

Со тоа го докажавме и вториот дел на теоремата за специјалниот случај кога фамилијата леви идеали што се и подгрупи го покриваат асоцијативот.

2.3. Комплетирање на доказот од вториот дел на теоремата.

Ќе го разгледаме сега најопштиот случај, а имено ќе претпоставиме дека унијата B од сите леви идеали на A што се и M -подгрупи не го исцрпува целото множество A . Според спроведената дискусија во претходниот дел, можеме да претпоставиме дека $B = G \times J$, каде што G е m -група, а операциите во B се определени со (20). Нека ставиме:

$$P = A \setminus B. \quad (25)$$

Ако се има предвид дека за секој $n \in M$, A е n -асоцијатив, од 2.1 следува дека постои фамилија хомоморфизми $\varphi^{(n)}: P \rightarrow G$ и $\xi^{(n)}: P \rightarrow T_J$, такви што:

а) Ако $a_0, a_1, \dots, a_n \in A$, $n \in M$, но $(a_0 a_1 \dots a_n) \notin P$, тогаш

$$(a_0 a_1 \dots a_n) = (a_0 \varphi^{(n)} a_1 \varphi^{(n)} \dots a_n \varphi^{(n)}, i \xi_{a_0}^{(n)} \xi_{a_1}^{(n)} \dots \xi_{a_n}^{(n)}), \quad (11')$$

при што на $G \times J$ $\varphi^{(n)}$ и $\xi^{(n)}$ се определени со (9).

б) Ако $p_0, \dots, p_n \in P$, но $(p_0 \dots p_n) \notin P$, тогаш $\xi_{p_0}^{(n)} \xi_{p_1}^{(n)} \dots \xi_{p_n}^{(n)}$ е константа.

Ќе покажеме дека $\varphi^{(n)}$ и $\xi^{(n)}$ не зависат од n , а со тоа ќе го комплетираме доказот на теоремата.

Нека $r, s \in M$ и нека $rs = n$. Ако $p \in P$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$, $i \in J$, тогаш производот $(p(x_1, i)(x_2, i) \dots (x_n, i))$ е определен во A сметан како r -асоцијатив, а и како s -асоцијатив. Според тоа,

$$(p \varphi^{(r)} x_1 x_2 \dots x_n, i) = (p(x_1, i)(x_2, i) \dots (x_n, i)) = (p \varphi^{(s)} x_1 \dots x_n, i),$$

од што следува дека:

$$(\forall p \in P) p \varphi^{(r)} = p \varphi^{(s)}, \text{ т. е. } \varphi^{(r)} = \varphi^{(s)}.$$

Исто така:

$$(x_1 \dots x_n p \varphi, i \xi_p^{(r)}) = ((x_1, i) \dots (x_n, i) p) = (x_1 \dots x_n p \varphi, i \xi_p^{(s)}),$$

од што следува:

$$(\forall p \in P, i \in J) i \xi_p^{(r)} = i \xi_p^{(s)}, \text{ т. е. } \xi_p^{(r)} = \xi_p^{(s)}.$$

Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата.

3. Неколку забелешки.

Со цел да ги илустрираме добиените резултати, ќе направиме овде неколку забелешки.

3.1 Прашање за егзистенција на M -асоцијативи од облик

$[G, J; P; \varphi, \xi]$.

а) Ако $P = \emptyset$, тогаш имаме $[G, J; \emptyset; \varphi, \xi] = G \times J$.

б) Ако P е произволно множество, тогаш можеме да сметаме дека P е делумен M -асоцијатив во кој што ни еден производ не е дефиниран. Нека G е m -група, J непразно множество, $\varphi: P \rightarrow G$ произволно пресликување, а $(\forall p \in P) \xi_p$ нека е константен елемент од J . Тогаш, јасно е дека се исполнети сите услови за да добиеме M -асоцијатив од облик $[G, J; P; \varphi, \xi]$.

в) Нека G е група, J непразно множество, а P M -асоцијатив. Можеме да добиеме M -асоцијатив $[G, J; P; \varphi, \xi]$, ако ставиме, на пример: $(\forall p \in P) p\varphi = e$, $i\xi_p = i$, при што e е единицата на групата G .

3.2. M -асоцијативи што се подасоцијативи на полугрупи.

За еден M -асоцијатив A се вели дека е подасоцијатив на полугрупа, ако постои полугрупа S таква што $A \subseteq S$ и:

$$(\forall n \in M, a_0, a_1, \dots, a_n \in A) (a_0 a_1 \dots a_n) = a_0 a_1 \dots a_n. \quad (26)$$

Овој поим е воведен во работата [3]. Во истата работа е наведен пример на M -асоцијатив што не е подасоцијатив на полугрупа, а во работата [4] изнесени неколку класи асоцијативи што се подасоцијативи од полугрупи. Подолу ќе споменеме некои од тие резултати.

а) Нека M е непразно множество од природни броеви со најмал елемент m , за кој што се претпоставува дека не е делител на сите елементи од M , и нека n е најмалиот елемент од M што не се дели со m . Потоа, нека претпоставиме дека A се состои од барем три различни елементи a, b, c . За секој $k \in M$ определуваме $k + 1$ -тарна операција во A на следниов начин:

$$\begin{aligned} k \neq n &\Rightarrow (\forall x_0, x_1, \dots, x_k \in A) (x_0 x_1 \dots x_k) = a \\ (x_0, x_1, \dots, x_n) \neq (c, c, \dots, c) &\Rightarrow (x_0 x_1 \dots x_n) = a \\ (c^{n+1}) &= b. \end{aligned} \quad (27)$$

Не е тешко да се провери дека A е M -асоцијатив. Овој асоцијатив не е подасоцијатив на полугрупа.

б) Секој m -асоцијатив, како и секој M -асоцијатив со лево (или десно) кратење е подасоцијатив од полугрупа. Исто така секоја M -група е M -подгрупа од група. (Да се види [4], стр. 6 и 8).

в) Во врска со а) и б) се наложува прашањето дали постојат M -асоцијативи од облик $[G; J; P; \varphi, \xi]$ што не се подасоцијативи од полугрупи. Дека такви асоцијативи постојат се установува лесно. Навистина, ако P е M -асоцијатив што не е подасоцијатив од полугрупа тогаш сигурно ни еден M -асоцијатив од облик $[G; J; P; \varphi, \xi]$ не е подасоцијатив од полугрупа.

Ако е, на пример, $P = \emptyset$, тогаш секој M -асоцијатив $[G; J; P; \varphi, \xi]$ е подасоцијатив на полугрупа, бидејќи, според б), G е M -подгрупа од некоја група H .

3.3. Можност за користење на бинарните полугрупи за испитување на асоцијативите.

Овде ќе покажеме како може резултатот од работата [6] да се добие како последица од резултатот на работата [1].

Да претпоставиме дека A е m -асоцијатив за кој што полугрупата S е максимална покривка ([2], стр. 6). Според тоа, имаме:

$$S = AUA^2U \dots UA^m, A^i \cap A^j = \emptyset$$

за $i \neq j$. Ако G е лев идеал на A , а во исто време и m -подгрупа, тогаш лесно се покажува дека

$$F = GUG^2U \dots UG^m$$

е лев идеал на S , а и подгрупа на S . Според основниот резултат на работата [1] можеме да сметаме дека $S = [H; J; Q; \varphi, \xi]$, при што $F = H \times \{i\}$ за некое $i \in J$. Освен тоа, постои m -подгрупа G_1 на H таква што $G = G_1 \times \{i\}$. Потоа, се покажува дека $G_1 \times J \subseteq A$, од што лесно се добива дека $A = [G_1; J; P; \varphi_1, \xi_1]$ каде што $P = A \setminus G_1 \times J$, а φ_1 и ξ_1 се рестрикциите од φ односно ξ на P .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. Чупона, Полугрупи во кои некој идеал е група, Год. Зборн. Прир. мат. факултет Скопје, Секц. А Кн. 14 (1963) 15—17.
- [2] Полугрупи генерирани од асоцијативи, Год. Зборн. Прир. мат. фак. Скопје, Секц. А Кн. 15 (1964) 5—25.
- [3] За асоцијативите, МАНУ Прилози I 1, Одд. Прир. мат. науки (1969) 9—20.
- [4] Асоцијативи со кратење, Год. Зборн. Прир. мат. фак. Секц. А Кн. 19 (1969) 5—14.
- [5] Б. Трпеновски, За некои n -полугрупи што се уни на n -групи, Билт. Друшт. матем. физ. СРМ 16 (1965) 11—17.
- [6] Ж. Мадевски, n -Асоцијативи кај кои некој лев идеал е n -група, Год. Зборн. Прир. мат. фак. Скопје, Секц. А Кн. 17—18 (1966—67) 5—10.

G. Čupona

M-ASSOCIATIVES IN WHICH SOME LEFT IDEALS ARE
M-SUBGROUPS

S u m m a r y

The purpose of this paper is to describe the class of M -associatives containing left ideals which are M -subgroups.

At first we give some preliminary definitions.

Let A be a nonempty set, M a nonempty set of positive integers, and for each $n \in M$, an $n+1$ -ary operation

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \rightarrow (a_0 a_1 \dots a_n) \quad (1)$$

be defined in A . The notion of *continued product* is defined in the usual way. Namely, the product with the length 0 is defined by:

$$(\forall a \in A) \Pi(a) = a. \quad (2)$$

If $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_n$ are products with lengths k_0, k_1, \dots, k_n , where $n \in M$, and if:

$$a_0 = \Pi_0(a_{00} \dots a_{0k_0}), a_1 = \Pi_1(a_{10} \dots a_{1k_1}), \dots, a_n = \Pi_n(\dots a_{nk_n}),$$

then the product $\Pi = (\Pi_0 \Pi_1 \dots \Pi_n)$ with length $k = k_0 + k_1 + \dots + k_n$ is defined by:

$$\Pi(a_{00} \dots a_{0k_0} \dots a_{n0} \dots a_{nk_n}) = (a_0 a_1 \dots a_k). \quad (3)$$

The algebra A is said to be an M -associative if for two arbitrary products Π' and Π'' with the same length k we have:

$$\Pi'(a_0 a_1 \dots a_k) = \Pi''(a_0 a_1 \dots a_k) \quad (4)$$

for all $a_0, a_1, \dots, a_k \in A$.

An algebra P is said to be a *partial M -associative* if, for each $n \in M$, a *partial $n+1$ -ary operation* is defined in P , such that, *if one of the products in (4) exists, the other one exists too, and then the equation (4) holds.*

Let A be an M -associative and $[M]$ the additive semigroup of positive integers generated by M . If $k \in M$ then there is a product Π with length k , and all such products induce the same $k+1$ -ary operation on A ; this operation will be denoted by $(a_0 a_1 \dots a_k)$. Thus,

$$(\forall a_0, \dots, a_k \in A) \Pi(a_0 a_1 \dots a_k) = (a_0 a_1 \dots a_k). \quad (5)$$

If $M_1 \subseteq [M]$, A may be assumed to be an M_1 -associative induced by the given M -associative. The same is also true for partial associatives.

Let A be a partial M_1 -associative, and B a partial M_2 -associative, where $M_1 \subseteq [M_2]$. A mapping $\varphi: A \rightarrow B$ is said to be a homomorphism, if it is a homomorphism from the given M_1 -associative A into the M_1 -associative B induced by the given M_2 -associative B . The set of the all such homomorphisms will be denoted by $\text{Hom}(A, B)$.

An M -associative A is said to be an M -group if:

$$(\forall n \in M, a_1, a_2, \dots, a_n \in A) (Aa_1 \dots a_n) = (a_1 \dots a_n A) = A. \quad (6)$$

An M -associative A is said to be an m -associative if $M = \{m, 2m, \dots, \dots, m, \dots\}$ i. e. if $m \in M$ and if m is a divisor of every element n of M .

A subset B of an M -associative is said to be a *left ideal* if:

$$(\forall n \in M) (AA \dots A B) = (A^n B) \subseteq B. \quad (7)$$

An M -associative A is said to be a *subassociative of a semigroup*, if there is a semigroup S , such that $A \subseteq S$, and

$$(\forall n \in M, a_0, a_1, \dots, a_n \in A) (a_0 \dots a_n) = a_0 \dots a_n. \quad (8)$$

Now we can state the results of this paper.

THEOREM. (I) Let G be an M -associative, J a nonempty set, and P a partial M -associative, such that $G \times J \cap P = \emptyset$. Denote by A the set $G \times J \cup P$, and by T_J the semigroup of transformations of the set J . Let $\varphi \in \text{Hom}(P, G)$, and $\xi \in \text{Hom}(P, T_J)$, such that if $p_0, \dots, p_n \in P$, $n \in M$, but $(p_0 p_1 \dots p_n)$ is not defined in P then $\xi_{p_0} \xi_{p_1} \dots \xi_{p_n}$ is a constant. Extend the mappings φ and ξ by:

$$(\forall x \in G, i, j \in J) (x, i) \varphi = x, j \xi_{(x,i)} = i. \quad (9)$$

For each $n \in M$, an $n+1$ -ary operation is defined in A by:

$$p = (p_0 p_1 \dots p_n) \text{ in } P \Rightarrow p = (p_0 p_1 \dots p_n) \text{ in } A; \quad (10)$$

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in A \ \& \ (a_0 a_1 \dots a_n) \notin P \Rightarrow$$

$$(a_0 \dots a_n) = (a_0 \varphi a_1 \varphi \dots a_n \varphi, i \xi_{a_0} \xi_{a_1} \dots \xi_{a_n}), \quad (11)$$

where i is an arbitrary element of J .

Then we have:

a) A is an M -associative which will be denoted by $[G, J; P; \varphi, \xi]$.

b) For each $i \in J$, $G_i = \{(x, i) \mid x \in G\}$ is a left ideal of A , and G_i is isomorphic with the given M -associative G .

(II) Let A be an M associative, and G a left ideal of A which is also an M -subgroup. Then we have:

- c) A is isomorphic with an M -associative of the form $[G, J; P; \varphi, \xi]$.
- d) If m is the greatest common divisor of the elements of M , then there is an m -group G which induces the given M -group.
- e) If A is the union of the collection of left ideals which are M -subgroups, then A is a subassociative of a semigroup.

EXAMPLES

1) If P is an arbitrary nonempty set it may be considered as a partial M -associative assuming that neither of the products $(p_0 \dots p_n)$ is defined. Then, if G is an M -associative, J a non-empty set, $\varphi: P \rightarrow G$ an arbitrary mapping from P into G , and if, for each $p \in P$, ξ_p is a constant, then we get an M -associative of the form $[G, J; P; \varphi, \xi]$.

2) Let G be a group, J a non-empty set, and P an M -associative. By putting: $(\forall p \in P) p\varphi = e$, $\xi_p = 1_J$ (where e is the neutral element of the group, and 1_J is the identity mapping of J) we get an M -associative $[G, J; P; \varphi, \xi]$.

3) Let m be the minimal positive integer belonging to M , and n the minimal positive integer of M such that m is not a divisor of n . (It is assumed that such an integer n exists.) Let A be a set with at least three different elements a, b, c . For each element $k \in M$, we define a $k+1$ -ary operation on A in the following way:

$$\begin{aligned} n \neq k &\Rightarrow (\forall x_0, \dots, x_k \in A) (x_0 \dots x_k) = a \\ (x_0, \dots, x_n) \neq (c, \dots, c) &\Rightarrow (x_0 \dots x_n) = a \\ (c \dots c) &= (c^{n+1}) = b. \end{aligned} \tag{12}$$

It is easy to see that A is an M -associative which is not an M -subassociative of a semigroup.

4) If P is an M -associative which is not a subassociative of a semigroup, then neither M -associative $[G, J; P; \varphi, \xi]$ is a subassociative of a semigroup.

5) Every: a) m -associative, b) M -group, c) M -associative with left (or right) cancellation — is a subassociative of a semigroup. ([1] p. 6; [4] pp 6 and 8).