Ѓ. Чупона

ЕДНА КЛАСА ДЕЛУМНИ АЛГЕБРИ

Предмет на оваа работа е испитување на една класа делумни алгебри, која што е обопштување на класата алгебри на сместувања разгледани во работите [5] и [6]. Затоа, алгебрите што се разгледуваат овде исто така ги викаме алгебри на сместувања.

Работава е поделена на 4 дела. Во првиот дел (стр. 2—13) се гради елементарната теорија на оваа класа алгебри. Имено, во **1.1** — **1.3** се изнесуваат аксиомите на класата алгебри на сместувања. Потоа, во **1.4** — **1.7** се работи со сложени збирови, при што се доаѓа и до поим за канонична форма на сложените збирови. Во **1.8** се покажува дека множеството Ω (А) од сите векторски операции над едно множество А, т. е. пресликувања од A^n во A^m е алгебра на сместувања, при што операциите „$\overset{i}{+}$" се определуваат со (19). Во одделите **1.9** — **1.12** се разгледуваат поимите: подалгебра, конгруенција и хомоморфизам, при што се формулираат повеќе особини карактеристични за овие поими кај секоја класа алгебри. На крајот на првиот дел (во **1.13**), од како се забележува дека класата алгебри на сместувања е категорија, се покажува дека во оваа категорија секоја фамилија алгебри има директен производ и се конструира ефективно овој производ.

Поимот за слободно генерирана алгебра на сместувања се воведува во одделот за хомоморфизми (**1.11**. d)), а целиот втор дел на работава е посветен на докажувањето на теоремата за егзистенција на слободни алгебри. Притоа, е и покажано дека секој елемент од една слободна алгебра може на единствен начин да се изрази во форма на каноничен збир од елементи на генераторното множество.

Во третиот дел (стр. 21—24) се покажува егзистенцијата на слободни производи во категоријата алгебри на сместувања.

Во последниот дел (стр. 24—29) се покажува дека секоја алгебра на сместувања може да се смести како подалгебра во соодветна алгебра на векторски операции. При докажувањето на оваа теорема се користат битно поимите за слободни алгебри, како и за слободни производи на алгебри.

Да напоменеме дека и во работата [3] се изучуваат две (потполно дефинирани) бинарни операции над множеството од делумни векторски операции над дадено множество A.

1. Алгебри на сместувања

Нека Λ е дадено множество, $f \to [f]$ пресликување од Λ во множеството N од природните броеви, а $f \to |f|$ исто така пресликување од Λ во множеството $N^0 = N \cup \{0\}$. За структурата $\Lambda([\ ], |\ |; \overset{i}{+} | i \in N^0)$ велиме дека е алгебра на сместувања ако $\{\overset{i}{+} |\ i \in N^0\}$ е фамилија делумни бинарни операции во Λ со следните особини.

1.1. Ако $f, g \in \Lambda$ и $i \in N^0$, тогаш $f \overset{i}{+} g \in \Lambda$ ако и само ако $i + [g] \leqslant |f|$; притоа, имаме:

$$[f \overset{i}{+} g] = [f], \quad |f \overset{i}{+} g| = |f| + |g| - [g]. \tag{1}$$

1.2. $f, g, h \in \Lambda$, $j + [h] \leqslant |g|$, $i + [g] \leqslant |f| \Rightarrow$

$$f \overset{i}{+} (g \overset{j}{+} h) = (f \overset{i}{+} g) \overset{i+j}{+} h. \tag{2}$$

1.3. $j + [h] \leqslant i$, $i + [g] \leqslant |f|$, $j + [g] + [h] \leqslant |f| + |g| \Rightarrow$

$$(f \overset{i}{+} g) \overset{j}{+} h = (f \overset{j}{+} h) \overset{i+|h|-[h]}{+} g. \tag{3}$$

Забелешка. Условите $j + [h] \leqslant |g|$, $i + [g] \leqslant |f|$ се нужни и доволни за егзистенцијата на левата страна од (2), а во исто време и доволни за егзистенцијата на десната страна од тоа равенство. Но, десната страна од (2) може да постои, а левата да не постои; таков е, на пример, случајот кога $|f| = 10$, $[h] = 3$, $|g| = [g] = 1$, $i = 2$, $j = 3$. Условите $i + [g] \leqslant |f|$, $j + [g] + [h] \leqslant |f| + |g|$ се нужни и доволни за егзистенцијата на левата страна од (3), а ако освен тоа имаме и $j + [h] \leqslant i$, тогаш:

$$j + [h] \leqslant |f|, \quad i + |h| - [h] \geqslant 0, \quad i + |h| - [h] + [g] \leqslant |f| + |h| - [h],$$

од што следува дека во тој случај ќе егзистира и десната страна на равенството (3). Во врска со ова равенство, се наложува прашањето дали десната страна може да ја има улогата на левата, т.е. дали може да биде точно неравенството $i + |h| - [h] + [g] \leqslant j$; кога тоа би било точно, би имале $i + |h| + [g] \leqslant j + [h] \leqslant i$, што не е можно бидејќи $|h| + [g] > 0$.

Ако Λ е алгебра на сместувања, тогаш множеството $\Lambda_{m,n}$ го определуваме со:

$$\Lambda_{m,n} = \{f \in \Lambda \mid [f] = m,\ |f| = n\}. \tag{4}$$

Според тоа Λ е унија на фамилијата $\{\Lambda_{m,n} \mid m \in N,\ n \in N^0\}$ дисјунктни множества, некои од кои што можат да бидат и празни.

Да забележеме дека ако $\Lambda_{m,n} = \varnothing$ за $m \neq 1$, тогаш поимот за алгебра на сместувања воведен овде се совпаѓа со соодветниот поим разгледан во работите [5] и [6], со таа разлика што овде $\overset{i}{+}$ ја има улогата на $\overset{i+1}{+}$ во [5], додека $|f|$ ја има улогата на $|f| + 1$ во [6].

Подолу ќе се задржиме на поимот за сложен збир во една алгебра на сместувања, при што ќе се покаже и дека секој сложен збир има соодветна канонична форма.

1.4. Ќе ја докажеме прво следнава особина:

Ако $i_1, \ldots, i_n$ е низа на ненегативни цели броеви, што ја задоволуваат релацијата:

$$i_{\lambda+1} + \sum_1^{\lambda+1} [f_\nu] \leqslant \sum_0^{\lambda} |f_\nu|, \tag{5}$$

за секој $\lambda : 0 \leqslant \lambda < n$, при што $f_0, \ldots, f_n \in \Lambda$, тогаш имаме

$$f = (\ldots ((f_0 \overset{i_1}{+} f_1) \overset{i_2}{+} f_2) \ldots) \overset{i_n}{+} f_n \in \Lambda \tag{6}$$

каде што:

$$[f] = [f_0],\ |f| = \sum_0^n |f_\nu| - \sum_1^n [f_\nu]. \tag{7}$$

Доказ. За $n = 1$ точноста на тврдењето следува од **1.1**. Претпоставувајќи точност за $n = m$, и користејќи ја уште еднаш аксиомата **1.1**, како и (5) за $\lambda = m$ добиваме дека $f \in \Lambda$ и при $n = m + 1$. На ист начин се покажува и дека се точни равенствата (7).

За натаму ќе ја употребуваме следнава ознака:

$$(\ldots ((f_0 \overset{i_1}{+} f_1) \overset{i_2}{+} f_2) \ldots) \overset{i_n}{+} f_n = f_0 \overset{i_1}{+} f_1 \overset{i_2}{+} \ldots \overset{i_n}{+} f_n. \tag{8}$$

1.5. Особината што ќе ја докажеме сега ќе не доведе до поимот каноничен збир.

Ако $g = g_0 \overset{j_1}{+} g_1 \overset{j_2}{+} \ldots \overset{j_n}{+} g_n$, тогаш постои пермутација $f_0, f_1, \ldots, f_n$ од $g_0, g_1, \ldots, g_n$, при што $f_0 = g_0$, и низа ненегативни цели броеви $i_1, i_2, \ldots, i_n$, такви што:

$$g = f_0 \overset{i_1}{+} f_1 \overset{i_2}{+} \dots \overset{i_n}{+} f_n,$$

при што е точно равенството (5), како и

$$i_{\lambda+1} + [f_{\lambda+1}] > i_\lambda, \tag{9}$$

за секој $\lambda : 1 \leqslant \lambda < n$.

Доказ. За $n=1$ тврдењето е тривијално, а за $n=2$ точноста следува од **1.3**. Претпоставваме точност за $n = m$. За $n = m + 1$ имаме

$$g = (g_0 \overset{j_1}{+} g_1 \overset{j_2}{+} \dots \overset{j_m}{+} g_m) \overset{j_{m+1}}{+} g_{m+1} = (h_0 \overset{k_1}{+} h_1 \overset{k_2}{+} \dots \overset{k_m}{+} h_m) \overset{j_{m+1}}{+} g_{m+1},$$

каде што $k_{v+1} + [h_{v+1}] > k_v$, за $v : 1 \leqslant v < m$. Ако е $j_{m+1} + [g_{m+1}] > k_m$, тогаш можеме да ставиме $f_v = h_v$, $i_v = k_v$ за $v \leqslant m$ и $i_{m+1} = j_{m+1}$, $f_{m+1} = g_{m+1}$. Во случај пак да биде $j_{m+1} + [g_{m+1}] \leqslant k_m$, тогаш, според (3), ќе имаме:

$$g = ((h_0 \overset{k_1}{+} \dots \overset{k_{m-1}}{+} h_{m-1}) \overset{j_{m+1}}{+} g_{m+1}) \overset{k_m+|g_{m+1}|-[g_{m+1}]}{+} h_m.$$

Работејќи на ист начин ќе дојдеме до:

$$g = h_0 \overset{k_1}{+} \dots \overset{k_{s-1}}{+} h_{s-1} \overset{j_{m+1}}{+} g_{m+1} \overset{k_s+|g_{m+1}|-[g_{m+1}]}{+} h_s + \dots \overset{k_m+|g_{m+1}|-[g_{m+1}]}{+} h_m, \tag{*}$$

каде што s е најголемиот број со особината $j_{m+1} + [g_{m+1}] \leqslant k_s$; според тоа, имаме $j_{m+1} + [g_{m+1}] > k_{s-1}$.

Ако во (*) ставиме:

$$h_v = f_v \text{ за } v \leqslant s - 1,\ f_s = g_{m+1},\ f_{v+1} = h_v \text{ за } s < v$$

и

$$i_v = k_v \text{ за } v \leqslant s - 1,\ i_s = j_{m+1},\ i_{v+1} = k_v + |g_{m+1}| - [g_{m+1}] \text{ за } s < v,$$

добиваме:

$$g = f_0 \overset{i_1}{+} f_1 \overset{i_2}{+} \dots \overset{i_m}{+} f_m \overset{i_{m+1}}{+} f_{m+1}. \tag{**}$$

Дека низата броеви $i_1, \dots, i_{m+1}$ го задоволува условот (5) следува од егзистенцијата на десната страна на (**). Преостанува уште да покажеме дека е точно неравенството (9) за секој $\lambda : 1 \leqslant \lambda < m + 1$. Од направената индуктивна претпоставка следува дека тоа е исполнето за $\lambda < s - 2$. За $\lambda = s - 1$, исто така по претпоставка, имаме:

$$i_s + [f_s] = j_{m+1} + [g_{m+1}] > k_{s-1} = i_{s-1}.$$

За $\lambda \geq s$, имаме:

$$i_{\lambda+1} + [f_{\lambda+1}] = k_{\lambda} + [h_{\lambda}] + |g_{m+1}| - [g_{m+1}] >$$
$$> k_{\lambda-1} + |g_{m+1}| - [g_{m+1}] = i_{\lambda}.$$

Со тоа го комплетиравме доказот на особината.

За збирот (8) велиме дека има канонична фома, ако покрај (5) е исполнет и условот (9). Според тоа, секој збир од облик $f \overset{i}{+} g$ има канонична форма, а по договор ќе сметаме дека и секој елемент f од Λ е каноничен збир.

1.6. Овде ќе го обопштиме поимот за сложен збир. Нека g_0, g_1 $\ldots$, g_n е низа елементи од Λ. Ако $0 \leqslant k \leqslant n$, тогаш пишуваме $g_k = \sum\limits_k^k g_\nu$ и велиме дека имаме збир со ред 0. Потоа, ако $g = \sum\limits_0^{k-1} g_\nu$ е збир со ред $k-1$ од $g_0, \ldots, g_{k-1}$, а $h = \sum\limits_k^n g_\nu$ збир со ред $n-k$ од $g_k, \ldots, g_n$, и ако $f = g \overset{i}{+} h$, за некој i, тогаш велиме дека f е збир со ред n од $g_0, \ldots, g_n$ и пишуваме $f = \sum\limits_0^n g_\nu$.

Ќе покажеме сега дека:

Секој збир $f = \sum\limits_0^n g_\nu$ може да се претстави во канонична форма:

$$f = f_0 \overset{i_1}{+} f_1 \overset{i_2}{+} \ldots \overset{i_n}{+} f_n,$$

каде што $f_0, \ldots, f_n$ е пермутација на $g_0, \ldots, g_n$, при што $f_0 = g_0$.

Доказ. Со последователно применување на равенството (2) може f да се претстави во облик:

$$f = g_0 \overset{j_1}{+} g_1 \overset{j_2}{+} \ldots \overset{j_n}{+} g_n,$$

а потоа се применува особината **1.5**.

1.7. Се покажува за корисно операцијата $\overset{0}{+}$ да се означува мултипликативно, па затоа наместо $f \overset{0}{+} g$ ќе пишуваме обично fg. Имајќи ги предвид **1.1**, **1.2** и **1.3** добиваме:

$$fg \in \Lambda \Leftrightarrow [g] \leqslant |f|; \quad [fg] = [f], \ |fg| = |f| + |g| - [g] \tag{10}$$

$$f(gh) = (fg)h, \ f(g \overset{i}{+} h) = (fg) \overset{i}{+} h, \ f \overset{j}{+} (gh) = (f \overset{j}{+} g) \overset{j}{+} h \tag{11}$$

$$(f \overset{i}{+} g)h = (fh) \overset{i+|h|-[h]}{+} g. \tag{12}$$

Притоа, во првото равенство од (11) се претпоставува дека $[h] \leqslant |g|$ и $[g] \leqslant |f|$, а во второто, односно третото, дека $i + [h] \leqslant |g|$, $[g] \leqslant |f|$, односно, $[h] \leqslant |g|$, $j + [g] \leqslant |f|$; во (12) се претпоставува дека $[h] \leqslant i$, $i + [g] \leqslant |f|, [g] + [h] \leqslant |f| + |g|$.

Да напоменеме дека Λ не е полугрупа во однос на операцијата $\overset{0}{+}$ бидејќи таа операција е делумна, но $\Lambda(\overset{0}{+})$ не е ни делумна полугрупа бидејќи е можно десната страна од првото равенство на (11) да постои а левата да не постои.

Се наметнува и следнава ознака:

$$f_0 f_1 \ldots f_n = (\ldots((f_0 f_1) f_2) \ldots) f_n, \tag{13}$$

при што за егзистенцијата на производот е нужно и доволно да биде:

$$\sum_{1}^{\lambda+1} [f_\nu] \leqslant \sum_{0}^{\lambda} |f_\nu| \tag{14}$$

за секој $\lambda : 0 \leqslant \lambda < n$.

Лесно се покажува точноста и на следнава особина:

Нека $f_0, f_1, \ldots, f_n$ е низа елементи од Λ, такви што $[f_{\nu+1}] \leqslant |f_\nu|$ за секој $\nu : 0 \leqslant \nu < n$. Тогаш, за секои $r, s : 0 \leqslant r \leqslant s \leqslant n$, постои производот $f_r f_{r+1} \ldots f_s$. Ако $r_0, \ldots, r_k$ е низа ненегативни цели броеви такви што $0 \leqslant r_0 < r_1 < \ldots < r_k < n$ и ако:

$$g_0 = f_0 \ldots f_{r_0}, \ldots, g_k = f_{r_{k-1}+1} \ldots f_{r_k}, \; g_{k+1} = f_{r_k+1} \ldots f_n,$$

тогаш имаме:

$$f_0 f_1 \ldots f_n = g_0 g_1 \ldots g_k g_{k+1}.$$

Доказ. Ако $r < s$, тогаш егзистенцијата на $f_r \ldots f_s$ следува од тоа што е очигледно исполнет условот (14); за $r = s$ производот се сведува на елементот f_r. За да го покажеме вториот дел на особината, ќе претпоставиме прво дека $k = 0$ и ќе ставиме $r_0 = r$. Ако се има предвид дека:

$$|g_0| = (|f_0| - [f_1]) + \ldots + (|f_{r-1}| - [f_r]) + |f_r| \geqslant [f_{r+1}] = [g_1],$$

добиваме дека $g_0 g_1$ постои. Потоа, добиваме:

$$g_0 g_1 = (f_0 \ldots f_r)((f_{r+1} \ldots f_{n-1}) f_n) = ((f_0 \ldots f_r)(f_{r+1} \ldots f_{n-1})) f_n =$$
$$= f_0 f_1 \ldots f_{n-1} f_n.$$

Притоа, претпоставивме дека $r+1 \neq n$, а направивме и една индуктивна претпоставка дека тврдењето е точно за $n-1$. За $r+1 = n$ точноста на последното равенство е јасна. За комплетирање на доказот го користиме добиениот резултат. Пред сè, егзистинцијата на производот $g_0 \dots g_{k+1}$ се покажува на потполно ист начин како што тоа погоре е направено за $g_0\, g_1$. Потоа, добиваме:

$$\begin{aligned} g_0 \dots g_k\, g_{k+1} &= (g_0 \dots g_k)\, g_{k+1} \\ &= (f_0 \dots f_{r_k})\,(f_{r_{k+1}} \dots f_n) \\ &= f_0 \dots f_n, \end{aligned}$$

со што го комплетиравме доказот.

1.8. Ќе укажеме овде на една конкретна класа од алгебри на сместувања.

Нека A е дадено множество и нека со $\Omega_{m,n}(A)$ го означиме множеството на сите пресликувања од декартовиот степен A^n во A^m. Притоа, според општоприфатениот договор, ќе претпоставуваме дека:

$$\Omega_{1,0}(A) = A, \qquad \Omega_{n,0}(A) = A^n. \tag{15}$$

Ако $f \in \Omega_{m,n}(A)$, тогаш пишуваме:

$$[f] = m, \quad |f| = n. \tag{16}$$

Го определуваме множеството $\Omega(A)$ со:

$$\Omega(A) = \bigcup_{m \in N,\ n \in N^0} \Omega_{m,n}(A), \tag{17}$$

за кое што велиме дека е множеството од векторски операции на A. Во $\Omega(A)$ определуваме фамилија операции $\{\overset{i}{+} \mid i \in N^0\}$ на следниот начин.

Нека $f, g \in \Omega(A)$, $i \in N^0$, при што $i + [g] \leqslant |f|$. Ако

$$g\,(x_{i+1}^{i+|g|}) = (y_1^{[g]})^{1)}, \tag{18}$$

тогаш:

$$f \overset{i}{+} g\,(x_1^{|f|+|g|-[g]}) = f\,(x_1^i\, y_1^{[g]}\, x_{i+|g|+1}^{|f|+|g|-[g]}). \tag{19}$$

Ако е притоа $g = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega_{n,0}(A)$, тогаш:

$$f \overset{i}{+} g\,(x_1^{|f|-[g]}) = f\,(x_1^i\, a_1^{[g]}\, x_{i+1}^{|f|-[g]}). \tag{19'}$$

Ќе покажеме сега дека:

---

1) За $s \leqslant t$ z_s^t се пишува наместо $z_s\, z_{s+1} \dots z_t$; $s > t \Rightarrow z_s^t = \varnothing$.

$\Omega(A)([\ ],\ |\ \ |;\ \overset{i}{+} \mid i \in N^0)$ е алгебра на сместувања.

Доказ. Јасно е дека е исполнета аксиомата **1.1**. Ако $f, g, h \in \Omega(A)$ при што $j+[h] \leqslant |g|$, $i+[g] \leqslant |f|$, тогаш за произволни $x_\nu \in A$, имаме:

$$f \overset{i}{+} (g \overset{j}{+} h)(x_1^{|f|+|g|+|h|-[g]-[h]}) =$$

$$= f(x_1^i\, g \overset{j}{+} h(x_{i+1}^{i+|g|+|h|-[h]})\, x_{i+|g|+|h|-[h]+1}^{|f|+|g|+|h|-[g]-[h]})$$

$$= f(x_1^i\, g(x_{i+1}^{i+j}\, h(x_{i+j+1}^{i+j+|h|})\, x_{i+j+|h|+1}^{i+|g|+|h|-[h]})\, x_{i+|g|+|h|-[h]+1}^{|f|+|g|+|h|-[g]-[h]})$$

$$= f \overset{i}{+} g(x_1^{i+j}\, h(x_{i+j+1}^{i+j+|h|})\, x_{i+j+|h|+1}^{|f|+|g|+|h|-[g]-[h]})$$

$$= (f \overset{i}{+} g) \overset{i+j}{+} h(x_1^{|f|+|g|+|h|-[g]-[h]}),$$

од што следува дека и аксиомата **1.2** е задоволена.

Да претпоставиме сега дека $i+[g] \leqslant |f|$, $j+[h] \leqslant i$, $j+[g]+[h] \leqslant \leqslant |f|+|g|$ и да ставиме $i+|h|-[h]=r$. Тогаш, за секои $x_\nu \in A$, имаме:

$$(f \overset{i}{+} g) \overset{j}{+} h(x_1^{|f|+|g|+|h|-[g]-[h]})$$

$$= f \overset{i}{+} g(x_1^j\, h(x_{j+1}^{j+|h|})\, x_{j+|h|+1}^{|f|+|g|+|h|-[g]-[h]})$$

$$= f(x_1^j\, h(x_{j+1}^{j+|h|})\, x_{j+|h|+1}^{r}\, g(x_{r+1}^{r+|g|})\, x_{r+|g|+1}^{|f|+|g|+|h|-[g]-[h]})$$

$$= f \overset{j}{+} h(x_1^r\, g(x_{r+1}^{r+|g|})\, x_{r+|g|+1}^{|f|+|g|+|h|-[g]-[h]})$$

$$= (f \overset{j}{+} h) \overset{r}{+} g(x_1^{|f|+|g|+|h|-[g]-[h]}),$$

а со тоа и го комплетиравме доказот дека $\Omega(A)$ е алгебра на сместувања.

1.9. Овде ќе го воведеме поимот за подалгебра, а потоа ќе извршиме куса дискусија и на поимите конгруенција и хомоморфизам.

Нека Λ е алгебра на сместувања и нека Σ е подмножество од Λ. За Σ велиме дека е подалгебра од дадената алгебра, ако е исполнет следниов услов:

$$f, g \in \Sigma \ \&\ f \overset{i}{+} g \in \Lambda \Rightarrow f \overset{i}{+} g \in \Sigma. \tag{20}$$

Јасно е дека се точни следните особини.

а) Ако $\Lambda_{,0}=\{f\in\Lambda \mid |f|=0\}$, тогаш секое подмножество од $\Lambda_{,0}$ е подалгебра.

б) Ако $P\subseteq N$, тогаш $\Lambda_{P,}=\{f\in\Lambda \mid [f]\in P\}$ е подалгебра.

в) За секој $n\in N$, $\Lambda_{n,n}$ е подалгебра. (Притоа $f, g\in\Lambda_{n,n}\Rightarrow f\overset{i}{+}g\in\Lambda_{n,n}$, ако и само ако $i=0$; според тоа $\Lambda_{n,n}$ е потполугрупа од Λ.)

г) Пресек на секоја фамилија подалгебри е подалгебра.

д) Ако $\Phi\subseteq\Lambda$ и ако Σ се состои од сите канонични збирови $f_0\overset{i_1}{+}\dots\overset{i_n}{+}f_n$, каде што $f_\nu\in\Phi$, тогаш, Σ е подалгебрата од Λ генерирана со Φ. (Со други зборови, Σ е пресек на фамилијата подалгебри од Λ во кои што се содржи Φ.)

1.10. Еквивалентноста α во множеството Λ се вика конгруенција на алгебрата Λ ако се исполнети следните услови.

$$f\,\alpha\,g\Rightarrow[f]=[g]\;\&\;|f|=|g|$$

$$f_1\,\alpha\,g_1\quad\&\quad f_2\,\alpha\,g_2\Rightarrow(f_1\overset{i}{+}f_2)\,\alpha\,(g_1\overset{i}{+}g_2). \tag{21}$$

Нека е тоа исполнето и нека, за секој $f\in\Lambda$, со f^α ја означиме класата на еквивалентноста α во која се содржи f. Во фактормножеството $\Lambda/\alpha=\{f^\alpha\mid f\in\Lambda\}$ се дефинира структура на алгебра на сместувања на следниов начин:

$$[f^\alpha]=[f],\quad |f^\alpha|=|f|,\quad f^\alpha\overset{i}{+}g^\alpha=(f\overset{i}{+}g)^\alpha. \tag{22}$$

Ќе споменеме неколку особини на конгруенциите.

а) Ако α е конгруенција на Λ, а Σ подалгебра од Λ, тогаш рестрикцијата $\beta=\alpha\mid\Sigma$ од α на Σ е конгруенција на Σ.

б) Пресек од една фамилија конгруенции е конгруенција. (Од ова следува дека ако α е произволна релација во Λ тогаш постои минимална конгруенција γ на Λ таква што $\alpha\leqslant\gamma$; за оваа конгруенција велиме дека е генерирана со α.).

в) Нека α е релација во Λ таква што

$$f\,\alpha\,g\Rightarrow\{([f]=[g]\;\&\;|f|=|g|)\;\&\;((h\overset{j}{+}f)\,\alpha\,(h\overset{j}{+}g)\;\&\;(f\overset{i}{+}k)\,\alpha\,(g\overset{i}{+}k))\},$$

и нека ставиме $\beta=\alpha\cup\alpha^{-1}$. Тогаш, конгруенцијата генерирана со α е определена со:

$$f\gamma g\Leftrightarrow\{f=g\;V\,(\exists\,h_1,\dots,h_n)\;f\,\beta\,h_1\,\beta\dots\beta\,h_n\,\beta\,g\}. \tag{23}$$

г) Ако α е конгруенција на Λ, тогаш и факторалгебрата Λ/α е алгебра на сместувања.

1.11. Нека Λ и Λ' се алгебри на сместувања. За пресликувањето $\varphi: f \to \varphi(f)$ од Λ во Λ' велиме дека е хомоморфизам ако се исполнети следниве услови:

$$[\varphi(f)] = [f], \quad |\varphi(f)| = |f|, \quad \varphi(f \overset{i}{+} g) = \varphi(f) \overset{i}{+} \varphi(g). \tag{24}$$

Ако, освен тоа, φ е и : инјекција, сурјекција, биекција, тогаш велиме дека φ е соодветно: мономорфизам, епиморфизам, изоморфизам.

а) Ако φ е хомоморфизам од Λ во Λ', и ако Σ е подалгебра од Λ, тогаш и рестрикцијата $\psi = \varphi \mid \Sigma$ од φ на Σ е хомоморфизам од Σ во Λ'.

б) Ако α е конгруенција на Λ, тогаш природното пресликување:

$$\mathrm{nat}\,\alpha : f \to f^{\alpha} \tag{25}$$

е епиморфизам од Λ во факторалгебрата Λ/α.

в) Ако $\varphi : \Lambda \to \Lambda'$ е хомоморфизам, тогаш релацијата

$$\alpha = \ker \varphi = \{(f, g) \mid \varphi(f) = \varphi(g)\} \tag{26}$$

е конгруенција на Λ, и притоа постои еднозначно определен мономорфизам $\varphi^* : \Lambda/\alpha \to \Lambda'$ таков што:

$$\varphi = \varphi^* \,\mathrm{nat}\, \alpha.$$

(Ова е заправо првата теорема за изоморфизам, а лесно се покажува дека важат и другите две теореми за изоморфизам; да се види [4], стр. 61)

г) Ако $\varphi : \Lambda \to \Lambda'$ е мономорфизам, тогаш постои алгебра на сместувања Λ'' изоморфна со Λ' за која што Λ е подалгебра. (Затоа, како што е во обичај, ќе сметаме дека Λ е подалгебра од Λ'.)

д) Нека Φ е генераторно множество за алгебрата Λ и нека φ е пресликување од Φ во алгебрата Λ' такво што: $[\varphi(f)] = [f]$ и $|\varphi(f)| = |f|$ за секој $f \in \Phi$. Постои најмногу еден хомоморфизам $\psi : \Lambda \to \Lambda'$ таков што $\psi(f) = \varphi(f)$, за секој $f \in \Phi$, т. е. $\varphi = \psi | \Phi$ е рестрикцијата од ψ на Φ. (Ако за секоја алгебра Λ' и секое пресликување φ од Φ во Λ' со споменатата особина, постои хомоморфизам $\psi : \Lambda \to \Lambda'$ чија рестрикција на Φ е φ, тогаш велиме дека Φ е база на алгебрата Λ, односно дека Λ е слободно генерирана со Φ. За една алгебра Λ велиме дека е слободна, ако има барем една база).

1.12. За една алгебра Λ велиме дека е алгебра на (векторски операции, ако таа е подалгебра од некоја алгебра $\Omega(A)$. Согласно 1.11.г), за алгебрата Λ ќе велиме дека е алгебра на операции и во случај кога е изоморфна со некоја подалгебра Λ' од алгебра $\Omega(A)$, т. е. кога постои мономорфизам $\varphi : \Lambda \to \Omega(A)$. Во **4** ќе покажеме дека секоја алгебра на сместувања е алгебра на операции, а овде ќе се задржиме на докажувањето на еден помошен резултат.

Нека е Λ алгебра на сместувања, таква што $A = \Lambda_{1,0} \neq \emptyset$ и нека $E = \{e_{21}, e_{22}, \ldots, e_{n1}, \ldots, e_{nn}, \ldots\}$ е подмножество од Λ такво што:

$$[x] = 1, \text{ за секој } x \in E, \ |e_{nr}| = n. \qquad (27)$$

Освен тоа, нека за секои $f, g \in \Lambda$, $a_\lambda \in A$, $\nu : 1 \leqslant \nu \leqslant [f]$, и : $i + [g] \leqslant |f|$, е точно равенството:

$$e_{[f]\nu}\,(f \overset{i}{+} g)\, a_1^{|f|+|g|-[g]} \;{}^{1)}$$

$$= e_{[f]\nu}\, f\, a_1^{i}\, e_{[g]1}\, g\, a_{i+1}^{i+|g|} \dots e_{[g][g]}\, g\, a_{i+1}^{i+|g|}\, a_{i+|g|+1}^{|f|+|g|-[g]}\,. \qquad (28)$$

Тогаш, ако за секој $f \in \Lambda$ и $a_\lambda \in A$ ставиме:

$$\tilde{f}\,(a_1^{[f]}) = (e_{[f]1}\, f a_1^{|f|}, \dots, e_{[f][f]}\, f a_1^{|f|}) \qquad (29)$$

добиваме хомоморфизам $\varphi : f \to \tilde{f}$ од Λ во $\Omega(A)$. (Притоа, ако $|f| = 0$, имаме:

$$\tilde{f} = (e_{[f]1}\, f, \dots, e_{[f][f]}\, f) \ \text{ за } \ [f] \neq 1$$

$$\tilde{f} = f \ \text{ за } \ [f] = 1.) \qquad (29')$$

Доказ. Јасно е дека $[\tilde{f}] = [f]$ и $|\tilde{f}| = |f|$. За да покажеме дека $\varphi : f \to f$ е хомоморфизам, треба да докажеме дека $\widetilde{f \overset{i}{+} g} = \tilde{f} \overset{i}{+} \tilde{g}$. При ова ќе го користиме равенството (28). Нека $a_\lambda \in A$, f, $g \in \Lambda$, $i \in N^0$, при што $i + [g] \leqslant |f|$. Според (28) и (29) имаме:

$$\widetilde{f \overset{i}{+} g}\,(a_1^{|f|+|g|-[g]})$$

$$= (e_{[f]1}\,(f \overset{i}{+} g)\, a_1^{|f|+|g|-[g]}, \dots, e_{[f][f]}\,(f \overset{i}{+} g)\, a_1^{|f|+|g|-[g]})$$

$$= (e_{[f]1}\, f a_1^{i}\, e_{[g]1}\, g\, a_{i+1}^{i+|g|} \dots e_{[g][g]}\, g\, a_{i+1}^{i+|g|}\, a_{i+|g|+1}^{|f|+|g|-[g]}, \dots)$$

$$= (e_{[f]1}\, f a_1^{i}\, (\tilde{g}\,(a_{i+1}^{i+|g|})\, a_{i+|g|+1}^{|f|+|g|-[g]}, \dots)$$

$$= (\tilde{f} \overset{i}{+} \tilde{g})\,(a_1^{|f|+|g|-[g]}),$$

од што следува дека пресликувањето $\varphi : f \to \tilde{f}$ е навистина хомоморфизам.

Јасни се формулациите на соодветни нужни и доволни услови за φ да биде: мономорфизам, епиморфизам, изоморфизам, па затоа ние нема да ги формулираме експлицитно тие услови.

---

1) Овде се употребува ознаката $f_0 f_1^k$ за $f_0 f_1 \dots f_k$.

1.13. Ако алгебрите на сместувања ги сметаме за објекти, а хомоморфизмите за морфизми, ја добиваме категоријата алгебри на сместување. Според тоа, сите поими што можат да се формулираат со јазикот на категориите се осмислени и за оваа категорија. Во овој дел ќе покажеме дека во категоријата алгебри на сместувања секоја фамилија алгебри има свој директен производ, а потоа — во наредните два параграфа ќе покажеме дека постојат слободни алгебри, како и дека секоја фамилија алгебри има свој слободен производ. Притоа, нема да ги дадеме општите дефиниции на овие поими во јазикот на теоријата на категориите.

Егзистенцијата на директните производи следува од следнава

ТЕОРЕМА. Нека $\{\Lambda^k \mid \kappa \in K\}$ е колекција алгебри на сместувања и нека ставима:

$$\Lambda_{m,n} = \bigcup_{k \in K} \Lambda^k{}_{m,n}, \quad \Lambda = \bigcup_{m \in N, n \in N^0} \Lambda_{m,n}. \tag{30}$$

Пресликувањата $f \to [f]$ и $f \to |f|$ се определуваат со:

$$f = (f_k)_k \in \Lambda_{m,n} \subseteq \Lambda \Rightarrow [f] = m \,\&\, |f| = n. \tag{31}$$

Потоа, ако $f = (f_k)_k$, $g = (g_k)_k \in \Lambda$ и ако $i + [g] \leqslant |f|$, $f \overset{i}{+} g$ се определува со:

$$f \overset{i}{+} g = (f_k \overset{i}{+} g_k)_k. \tag{32}$$

Тогаш, имаме:

а) Λ е алгебра на сместувања.

б) За секој $p \in K$, пресликувањето $\bar{u}_p : \Lambda \to \Lambda^p$ определено со:

$$\bar{u}_p\,((f_k)_k) = f_p \tag{33}$$

е хомоморфизам од Λ во Λ^p.

в) Ако Λ^* е алгебра на сместувања, а $\bar{u}^* : \Lambda^* \to \Lambda^k$ фамилија хомоморфизми, тогаш постои еднозначно определен хомоморфизам $\varphi: \Lambda^* \to \Lambda$, таков што:

$$\bar{u}^*{}_k = \bar{u}_k \varphi, \tag{34}$$

за секој $k \in K$.

г) Нека $\tilde{\Lambda}$ е алгебра на сместувања и $\tilde{u}_k : \tilde{\Lambda} \to \Lambda$ фамилија хомоморфизми, таква што за секоја алгебра на сместувања $\tilde{\Lambda}^*$ и секоја фамилија хомоморфизми $\tilde{u}^*{}_k : \Lambda^* \to \tilde{\Lambda}^k$ постои еднозначно определен хомоморфизам $\tilde{\varphi} : \tilde{\Lambda}^* \to \tilde{\Lambda}$ таков што

$$\tilde{u}^*{}_k = \tilde{u}_k \tilde{\varphi}, \tag{34'}$$

за секој $k \in K$. Тогаш, алгебрата $\tilde{\Lambda}$ е изоморфна со погоре дефинирана алгебра Λ.

Доказот на теоремата е јасен. Да забележеме само дека хомо морфизмите $\bar{u}_k$ не мораат да бидат епиморфизми. Имено, ако $\Lambda^k{}_{m,n} = \emptyset$ за некој $k \in K$, тогаш $\Lambda_{m,n} = \emptyset$, па значи во овој случај $\bar{u}_p$ нема да биде епиморфизам нити за еден $p \in K$, за кој $\Lambda^p{}_{m,n} \neq \emptyset$.

Формулираната теорема заправо и ни сугерира алгебрата Λ да ја викаме директен производ на дадената фамилија алгебри.

2. Слободни алгебри

Целта на овој дел е да покажеме дека егзистираат слободни алгебри на сместувања, а ќе укажеме и на уште една карактеристична особина на овој вид алгебри.

ТЕОРЕМА. Нека $\{\Phi_{m,n} \mid m \in N,\ n \in N^0\}$ е колекција дисјунктни множества и нека Φ е унијата на множествата од оваа колекција. Постои една и (до изоморфизам) само една слободна алгебра на сместувања за која што Φ е база, при што:

$$f \in \Phi_{m,n} \Leftrightarrow [f] = m \ \&\ |f| = n. \tag{35}$$

Доказ. Доказот ќе го спроведеме во неколку етапи.

(i) Прво ќе ја конструираме бараната алгебра Λ. Имено, со Λ го означуваме множеството од сите низи:

$$(f_0, f_1, \ldots, f_k;\ i_1, \ldots, i_k) = (f_0^k;\ i_1^k) \tag{36}$$

каде што $f_\nu \in \Phi$, $i \in N^0$, при што:

$$i_{\lambda+1} + \sum_{1}^{\lambda+1} [f_\nu] \leqslant \sum_{0}^{\lambda} |f_\nu| \tag{37}$$

$$i_{\lambda+1} + [f_{\lambda+1}] > i_\lambda \tag{38}$$

за секој $\lambda : 1 \leqslant \lambda < k$. Притоа, $[f_\nu]$ и $|f_\nu|$ се определени со (35)).

Ги определуваме пресликувањата $f \to [f]$ и $f \to |f|$ со:

$$[(f_0^k;\ i_1^k)] = [f_0]$$

$$|(f_0^k;\ i_1^k)| = \sum_{0}^{k} |f_\nu| - \sum_{1}^{k} [f_\nu]. \tag{39}$$

Јасно е дека $[f] \geqslant 1$, за секој $f \in \Lambda$, а од (37) следува дека $|f| \geqslant 0$. Според тоа, [ ] е пресликување од Λ во N, а | | од Λ во N^0.

Да напоменеме дека во (36) може да биде $k=0$, а во тој случај имаме $(f_0) \in \Lambda$. Сега, (39) го има следниов облик:

$$[(f_0)] = [f_0], \; |(f_0)| = |f_0|, \tag{39'}$$

додека (37) и (38) се „празни".

(*ii*) Овде ќе ја дефинираме фамилијата операции $\{\overset{i}{+} \mid i \in N^0\}$ и ќе покажеме дека аксиомата **1.1** е задоволена.

Нека $f = (f_0^k;\, i_1^k) \in \Lambda$, $g_0 \in \Phi$, $i \in N^0$, при што $i + [g_0] \leqslant |f|$. Го определуваме збирот $f \overset{i}{+} (g_0)$ на следниов начин:

$$i + [g_0] > i_k \Rightarrow f \overset{i}{+} (g_0) = (\overset{k}{f_0},\, g_0;\, \overset{k}{i_1},\, i) \tag{40}$$

$$i + [g_0] \leqslant i_\nu \text{ за секој } \nu : 1 \leqslant \nu \leqslant k \Rightarrow$$

$$f \overset{i}{+} (g_0) = (f_0,\, g_0;\, \overset{k}{f_1};\, i,\, \overset{k}{j_1}), \quad j_\nu = i_\nu + |g_0| - [g_0]. \tag{41}$$

Преостанува случајот кога $i + [g_0] \leqslant i_k$, но постои λ таков што $i + [g_0] > i_\lambda$. Во овој случај, да го означиме со s најголемиот број таков што $i + [g_0] > i_{s-1}$. Сега, $f \overset{i}{+} (g_0)$ се дефинира со:

$$f \overset{i}{+} (g_0) = (\overset{s-1}{f_0},\, g_0,\, \overset{k}{f_s};\, \overset{s-1}{i_1},\, i,\, \overset{k}{j_s}), \tag{42}$$

каде што:

$$j_{s+\nu} = i_{s+\nu} + |g_0| - [g_0]. \tag{43}$$

Да забележиме дека (40) и (41) можат да се сметаат за специјални случаи од (42). Навистина, за $s=1$ (42) се сведува на (40), а на (41) за $s = k+1$.

Ќе покажеме сега дека, при направените претпоставки, десната страна на (42) е елемент од Λ. За таа цел е потребно да се покаже дека се задоволени условите (37) и (38). Дека тоа е точно за $\lambda \leqslant s-2$ следува од $f \in \Lambda$. За $\lambda = s-1$, (37) и (38) ги добиваат следниве облици:

$$i + \sum_1^{s-1} [f_\nu] + [g_0] \leqslant \sum_0^{s-1} |f_\nu| \tag{37'}$$

$$i + [g_0] > i_{s-1}. \tag{38'}$$

Од направената претпоставка за s следува дека (38') е точно. Ако се има предвид тоа што $i + [g_0] \leqslant i_s$, како и (37) за $\lambda = s-1$, се добива:

$$i + \sum_1^{s-1} [f_\nu] + [g_0] < i_s + \sum_1^{s} [f_\nu] \leqslant \sum_0^{s-1} |f_\nu|,$$

од што следува и (37').

Го разгледуваме сега случајот $\lambda \geqslant s$. Тогаш, имаме:

$$j_{s+\zeta} + \sum_{1}^{s+\zeta} [f_\nu] + [g] = i_{s+\zeta} + \sum_{1}^{s+\zeta} [f_\nu] + |g_0| \leqslant \sum_{0}^{s+\zeta} |f_\nu| + |g_0|,$$

и

$$\begin{aligned} j_{s+\zeta} + [f_{s+\zeta}] &= i_{s+\zeta} + |g_0| - [g_0] + [f_{s+\zeta}] \\ &> i_{s+\zeta+1} + |g_0| - [g_0] = j_{s+\zeta+1}, \end{aligned}$$

па значи и во овој случај се исполнети условите (37) и (38), со што го комплетиравме доказот дека десната страна на (42) е елемент од Λ.

Јасно е дека:

$$\begin{aligned} &[f \overset{i}{+} (g_0)] = [f] = [f_0] \\ &|f \overset{i}{+} (g_0)| = |f| + |g_0| - [g_0] = |f| + |(g_0)| - [(g_0)]. \end{aligned} \tag{1'}$$

Да претпоставиме сега $f = (f_0^k;\ i_1^k)$, $g = (g_0^r; j_1^r)$, $h = (g_0^{r+1}; j_1^{r+1}) \in \Lambda$, $i + [h] = i + [g_0] \leqslant |f|$ и дека $f \overset{i}{+} g \in \Lambda$, при што:

$$\begin{aligned} &[f \overset{i}{+} g] = [f] = [f_0] \\ &|f \overset{i}{+} g| = |f| + |g| - [g] = |f| + |g| - [g_0]. \end{aligned} \tag{1''}$$

Збирот $f \overset{i}{+} h$ го дефинираме со:

$$f \overset{i}{+} h = (f \overset{i}{+} g) \overset{i+j_{r+1}}{+} (g_{r+1}). \tag{44}$$

Поради $h \in \Lambda$, имаме

$$j_{r+1} + \sum_{1}^{r+1} [g_\nu] \leqslant \sum_{0}^{r} |g_\nu|,$$

а од тоа, според (39) и (1''), добиваме;

$$\begin{aligned} i + j_{r+1} + [g_{r+1}] &= i + j_{r+1} + \sum_{1}^{r+1} [g_\nu] - \sum_{1}^{r} [g_\nu] \\ &\leqslant i + \sum_{0}^{r} |g_\nu| - \sum_{1}^{r} [g_\nu] \\ &= i + |g| = i + [g_0] + |g| - [g_0] \\ &\leqslant |f| + |g| - [g] = |f \overset{i}{+} g|, \end{aligned}$$

од што следува дека десната страна од (44) е навистина елемент од Λ.

2*

Освен тоа, имаме:

$$[f \overset{i}{+} h] = [f_0] = [f]$$

и

$$\begin{aligned} |f \overset{i}{+} h| &= |f \overset{i}{+} g| + |g_{r+1}| - [g_{r+1}] \\ &= |f| + |g| - [g] + |g_{r+1}| - [g_{r+1}] \\ &= |f| + |h| - [h]. \end{aligned}$$

Со тоа го комплетиравме доказот на **1.1**

(*iii*) Ќе покажеме дека се исполнети аксиомите **1.2** и **1.3** со што ќе го комплетираме доказот на тврдењето дека Λ е алгебра на сместувања.

Прво, ќе го докажеме следниов специјален случај на **1.3**.

1.3'. Ако $f = (\overset{k}{f_0}; \overset{k}{i_1})$, $g = (g_0)$, $h = (h_0) \in \Lambda$, $j + [h] \leqslant i$, $i + [g] \leqslant |f|$ и $j + [g] + [h] \leqslant |f| + |g|$, тогаш равенството (3) е исполнето.

Доказ. Ќе го определиме прво збирот $(f \overset{i}{+} g) \overset{j}{+} h$. Според (42) имаме:

$$f \overset{i}{+} g = (\overset{r-1}{f_0}, g_0, \overset{k}{f_r}; \overset{r-1}{i_1}, i, \overset{k}{i'_r}), \tag{42'}$$

каде што r е најголемиот број таков што $i + [g] > i_{r-1}$, т. е. $i + [g] \leqslant i_{r+v}$, за $v \geqslant 0$. Притоа,

$$i'_{r+v} = i_{r+v} + |g| - [g]. \tag{43'}$$

Поради, $j + [h] \leqslant i$, имаме:

$$j + [h] + [g] \leqslant i + [g] \leqslant i_{r+v} \leqslant i_{r+v} + |g|,$$

од што следува:

$$j + [h] \leqslant i_{r+v} + |g| - [g] = i'_{r+v}.$$

Ако се има предвид последното неравенство, според (42) и (42') добиваме:

$$(f \overset{i}{+} g) \overset{j}{+} h = (\overset{s-1}{f_0}, h, \overset{r-1}{f_s}, g_0, \overset{k}{f_r}; \overset{s-1}{i_1}, j, \overset{r-1}{i'_s}, i', \overset{k}{i''_r}), \tag{42''}$$

каде што $s \leqslant r$ и:

$$\begin{aligned} & i' = i + |h| - [h] \\ & i'_{s+v} = i_{s+v} + |h| - [h] \ (\text{за } s + v \leqslant r - 1) \\ & i''_{r+\lambda} = i'_{r+\lambda} + |h| - [h] = i_{r+\lambda} + |g| + |h| - [g] - [h]. \end{aligned} \tag{43''}$$

Ќе го определиме сега $(f \overset{j}{+} h) \overset{i'}{+} g$. Според (42″) имаме $j+[h]>j_{s-1}$ $j+[h] \leqslant i_{s+\lambda}$ за $s+\lambda \leqslant r-1$. Од друга страна, поради $i+[g] \leqslant i_{r+\nu}$ и $j+[h] \leqslant i$, добиваме: $j+[h] \leqslant i_{r+\nu}$. Според тоа, имаме:

$$f \overset{i}{+} h = (f_0^{s-1},\, h_0,\, f_s^k;\; i_1^{s-1},\, j,\, i'''^k_s), \tag{42‴}$$

каде што

$$i'''_{s+\nu} = i_{s+\nu} + |h| - [h]. \tag{43‴}$$

Ако имаме предвид дека

$$i'+[g] = i+|h|-[h]+[g] \geqslant j+[h]+|h|-[h]+|g| > j,$$

$$i'+[g] = i+|h|-[h]+[g] > i_{r-1}+|h|-[h] = i'_{r-1},$$

и

$$i'+[g] = i+[g]+|h|-[h] \leqslant i_{r+\nu}+|h|-[h] = i'_{r+\nu},$$

добиваме:

$$(f \overset{j}{+} h) \overset{i'}{+} g = (f_0^{s-1},\, h_0,\, f_s^{r-1},\, g_0,\, f_r^k;\; i_1^{s-1},\, j,\, i'''^{r-1}_s,\, i'\, i^{\mathrm{IV}k}_r), \tag{42^{IV}}$$

каде што

$$i^{\mathrm{IV}}_{r+\nu} = i'''_{r+\nu}+|g|-[g] = i_{r+\nu}+|g|+|h|-[g]-[h]. \tag{43^{IV}}$$

Од (42″) и (42^{IV}), ако се имаат предвид и (43″), (43^{III}), (43^{IV}), добиваме дека:

$$(f \overset{i}{+} g) \overset{j}{+} h = (f \overset{j}{+} h) \overset{i+|h|-[h]}{+} g,$$

со што ја докажавме особината **1.3′**.

(iv) Овде ќе покажеме дека е задоволена аксиомата **1.2**. Нека:

$$f = (f_0^k;\, i_1^k),\quad g = (g_0^r;\, j_1^r),\quad h = (h_0^t;\, p_1^t), \tag{45}$$

и нека $j+[h] \leqslant |g|$, $i+[g] \leqslant |f|$.

Ако $r=t=0$, според (42) и (44) добиваме:

$$f \overset{i}{+} (g \overset{j}{+} h) = f \overset{i}{+} (g_0\, h_0;\, j) = (f \overset{i}{+} (g_0)) \overset{i+j}{+} (h_0) = (f \overset{i}{+} g) \overset{i+j}{+} h.$$

Нека $r>0$ и $t=0$. Ако $j+[h]>j_r$, тогаш пак според (42) и (44) добиваме:

$$f \overset{i}{+} (g \overset{j}{+} h) = f \overset{i}{+} (g_0^r\, h_0;\, j_1^r,\, j) = (f \overset{i}{+} (g_0^r;\, j_1^r)) \overset{i+j}{+} (h_0) = (f \overset{i}{+} g) \overset{i+j}{+} h.$$

Да претпоставиме дека $j+[h]\leqslant j_r$ и дека q е најголемиот број таков што $j+[h]>j_{q-1}$. Во тој случај ќе имаме:

$$g \overset{j}{+} h = (g_1^{q-1}\, h_0\, g_q^r;\ j_1^{q-1},\ j,\ j'^r_q). \tag{46}$$

каде што:

$$j'_{q+v} = j_{q+v} + |h| - [h]. \tag{47}$$

Потоа, правејќи една индуктивна претпоставка, добиваме:

$$\begin{aligned} f \overset{i}{+} (g \overset{j}{+} h) &= (f \overset{i}{+} (g_0^{q-1}\, h_0\, g_q^{r-1};\ j_1^{q-1}\, j\, j'^{r-1}_q)) \overset{i+j'_r}{+} (g_r) \\ &= (f \overset{i}{+} ((g_0^{r-1};\ j_1^{r-1}) \overset{i}{+} (h_0)) \overset{i+j'_r}{+} (g_r) \\ &= ((f \overset{i}{+} (g_0^{r-1};\ j_1^{r-1})) \overset{i+j}{+} (h_0)) \overset{i+j'_r}{+} (g_r). \end{aligned}$$

Имајќи ја предвид претпоставката $j+[h]\leqslant j_r$, т. е. $j+i+[h]\leqslant i+j_r$, според **1.3′**, десната страна од последното равенство можеме да ја претставиме во облик:

$$((f \overset{i}{+} (g_0^{r-1};\ j_1^{r-1})) \overset{i+j'_r}{+} (g_r)) \overset{i+j}{+} (h_0),$$

а потоа и:

$$(f \overset{i}{+} ((g_0^{r-1};\ j_1^{r-1}) \overset{j_r}{+} (g_r)) \overset{i+j}{+} h$$

и конечно:

$$(f \overset{i}{+} g) \overset{i+j}{+} h.$$

Со тоа покажавме дека равенството (2) е точно за $t=0$.

Нека $t\geqslant 1$. Со обична индукција добиваме:

$$\begin{aligned} f \overset{i}{+} (g \overset{j}{+} h) &= f \overset{i}{+} (g \overset{j}{+} ((h_0^{t-1};\ p_1^{t-1}) \overset{p_t}{+} (h_t))) \\ &= f \overset{i}{+} ((g \overset{j}{+} (h_0^{t-1};\ p_1^{t-1})) \overset{j+p_t}{+} (h_t)) \\ &= (f \overset{i}{+} (g \overset{j}{+} (h_0^{t-1};\ p_1^{t-1})) \overset{i+j+p_t}{+} (h_t) \\ &= ((f \overset{i}{+} g) \overset{i+j}{+} (h_0^{t-1};\ p_1^{t-1})) \overset{i+j+p_t}{+} (h_t) \end{aligned}$$

$$= (f \overset{i}{+} g) \overset{i+j}{+} ((h_0^{t-1};\ p_1^{t-1}) \overset{p_t}{+} (h_t))$$

$$= (f \overset{i}{+} g) \overset{i+j}{+} h.$$

Со тоа го комплетиравме доказот на **1.2**.

(v) Овде ќе го комплетираме доказот на **1.3**.

Нека f, g и h се определени со (45) и нека $j+[h] \leqslant i$, $i+[g] \leqslant |f|$, $j+[g]+[h] \leqslant |f|+|g|$. За $r=t=0$, според **1.3**$'$, равенството (3) е точно. Ако ставиме:

$$h' = (h_0^{t-1};\ p_1^{t-1}),$$

тогаш ќе имаме:

$$h = h' \overset{p_t}{+} (h_t),$$

при што:

$$|h| = |h'| + |h_t| - [h_t] \quad [h] = [h'] = [h_0]$$

$$p_t + [h_t] \leqslant |h'|,\ j \leqslant i - [h],\ j + p_t + [h_t] = i + |h'| - [h'].$$

Со помош на **1.2**, **1.3**$'$ и една индуктивна претпоставка добиваме:

$$\begin{aligned}
(f \overset{i}{+} g) \overset{j}{+} h &= (f \overset{i}{+} g) \overset{j}{+} (h' \overset{p_t}{+} (h_t)) \\
&= ((f \overset{i}{+} g) \overset{i+j}{+} h') \overset{j+p_t}{+} (h_t) \\
&= ((f \overset{j}{+} h') \overset{i+|h'|-[h']}{+} g) \overset{j+p_t}{+} (h_t) \\
&= ((f \overset{j}{+} h') \overset{j+p_t}{+} (h_t)) \overset{i+|h'|-[h']+|h_t|-[h_t]}{+} g \\
&= (f \overset{j}{+} (h' \overset{p_t}{+} (h_t))) \overset{i+|h|-[h]}{+} g \\
&= (f \overset{j}{+} h) \overset{i+|h|-[h]}{+} g,
\end{aligned}$$

со што ја покажавме точноста на **1.3**.

Со досега спроведената дискусија докажавме дека Λ е алгебра на сместувања.

(vi) Нека ставиме:

$$\tilde{\Phi} = \{(f_0) \mid f_0 \in \Phi\}, \tag{46}$$

Ќе покажеме дека Λ е генерирана со $\tilde{\Phi}$. Навистина, ако $f = (f_0^k;\ i_1^k) \in \Lambda$, тогаш, според (8) и (40), имаме:

$$(f_0^k;\ i_1^k) = (f_0) \overset{i_1}{+} (f_1) \overset{i_2}{+} \dots \overset{i_k}{+} (f_k), \tag{46}$$

при што, ако се има предвид дека се исполнети (37) и (38), десната страна е каноничен збир. Од исти причини важи и обратното, т.е. ако $g \in \Lambda$ и ако

$$g = (g_0) \overset{j_1}{+} (g_1) \overset{j_2}{+} \dots \overset{j_r}{+} (g_r), \tag{47'}$$

каде што збирот на десната страна е каноничен при што $g_\nu \in \Phi$, тогаш $g = (g_0^r;\ j_1^r)$. Од ова следува дека: $\tilde{\Phi}$ е генераторно множество на Λ, а и уште повеќе дека: секој елемент $f \in \Lambda$ може на единствен начин да се претстави како каноничен збир на елементи од $\tilde{\Phi}$.

(vii) Ќе покажеме сега дека Λ е слободно генерирана со $\tilde{\Phi}$. Навистина, нека Λ' е алгебра на сместувања и φ пресликување од во Λ' такво што

$$(\forall f \in \Phi)\ [\varphi(f)] = [(f)] = [f],\ |\varphi(f)| = |(f)| = |f|. \tag{48}$$

Ако $f = (f_0^k;\ i_1^k)$, каде што $f_\nu \in \Phi$, тогаш $\psi(f)$ се определува со:

$$\psi(f) = \varphi(f_0) \overset{i_1}{+} \varphi(f_1) \overset{i_2}{+} \dots \overset{i_k}{+} \varphi(f_k). \tag{49}$$

Од (48) и (49), ако притоа се имаат предвид (7) и (39), добиваме:

$$(\forall f \in \Lambda)\ [(\psi f)] = [f],\ |\psi(f)| = |f|. \tag{50}$$

Нека $f = (f_0^k;\ i_1^k)$, $g = (g_0)$ и $i + [g_0] \leqslant |f|$. Користејќи ги равенствата (42), (49) и (3) се добива дека:

$$\psi(f \overset{i}{+} g) = \psi(f) \overset{i}{+} \psi(g),$$

а со индукција потоа лесно се покажува дека тоа равенство е точно и во случај кога $g = (g_0^r;\ j_1^r)$, каде што $r \geqslant 1$. Од сето тоа следува дека ψ е хомоморфизам, со што покажавме дека $\tilde{\Phi}$ е навистина база на Λ.

(viii) Ако во Λ секој елемент $(f) \in \tilde{\Phi}$ го замениме со соодветниот елемент $f \in \tilde{\Phi}$, па значи и $(f_0^k;\ i_1^k)$ со $f_0 \overset{i_1}{+} f_1 \overset{i_2}{+} \dots \overset{i_k}{+} f_k$, добиваме дека можеме да сметаме Φ да е база на Λ, т. е. дека Λ е слободно генерирана со Φ.

Со тоа и го комплетиравме доказот на теоремата, бидејќи е јасно дека две слободни алгебри на сместувања со иста база се изоморфни.

Од докажаната теорема (заправо од (vi)) ја добиваме и следнава

ПОСЛЕДИЦА. Алгебрата на сместување Λ е слободно генерирана со $\Phi \subseteq \Lambda$, ако и само ако секој елемент $f \in \Lambda$ може на единствен начин да се претстави како каноничен збир на елементи од Φ.

3. Слободни производи

Овде ќе покажеме дека во категоријата алгебри на сместувања постојат слободни производи. Тоа се гледа, имено, од следнава

ТЕОРЕМА. Нека $\{\Lambda^k \mid k \in K\}$ е колекција од дисјунктни алгебри на сместувања. Постои една и (до изоморфизам) само една алгебра на сместувања Λ со следниве особини:

а) Секоја од дадените алгебри Λ^k е подалгебра на Λ и притоа Λ е генерирана од множеството

$$\Phi = \bigcup_{k \in K} \Lambda^k.$$

б) Ако Λ' е алгебра на сместувања, а $\varphi_k : \Lambda^k \to \Lambda'$ фамилија хомоморфизми, тогаш постои еднозначно определен хомоморфизам $\psi : \Lambda \to \Lambda'$ таков што $\varphi_k = \psi \mid \Lambda^k$, т. е. φ_k е рестрикцијата од ψ на Λ^k за секој $k \in K$.

Доказ. Ако $f \in \Phi$, тогаш $f \in \Lambda^k$, за некој $k \in K$, па значи $[f]$ и $|f|$ се определени броеви; нивната еднозначност следува од тоа што дадената фамилија алгебри е дисјунктна. Нека Σ е алгебрата на сместувања што е слободно генерирана со Φ. Ако $i \in N^0$, тогаш со $\overset{i}{+}$ ја означуваме соодветната операција во Σ, а со $\overset{i}{+}_k$ во Λ^k. Определуваме релација α во Σ на следниов начин. Нека $f \in \Sigma$ е претставен во каноничен облик:

$$f = f_0 \overset{i_1}{+} \ldots \overset{i_r}{+} f_r + \ldots \overset{i_s}{+} f_s, \quad (f_\nu \in \Phi) \tag{51}$$

при што:

$$f_r = f'_r \overset{i}{+}_k f''_r \text{ во } \Lambda^k. \tag{52}$$

Ако:

$$g = f_0 + \ldots + (f'_r \overset{i}{+} f''_r) + \ \ldots + f_s, \tag{51'}$$

тогаш ќе пишуваме:

$$f \alpha g. \tag{53}$$

Јасно е дека:

$$f \alpha g \Rightarrow [f] = [g] \,\&\, |f| = |g|, \tag{54}$$

а и дека:

$$\begin{gathered} f \alpha g \,\&\, i + [h] \leqslant |f| \Rightarrow (f \overset{i}{+} h) \alpha (g \overset{i}{+} h) \\ f \alpha g \,\&\, j + [f] \leqslant |h| \Rightarrow (h \overset{j}{+} f) \alpha (h \overset{j}{+} g). \end{gathered} \tag{55}$$

Според 1.10. в), со (23) е определена конгруенцијата γ што е генерирана со α, при што $\beta = \alpha \cup \alpha^{-1}$. Значи, γ е минималната конгруенција во Λ во која што се содржи релацијата α.

Да ја означиме со Λ факторалгебрата Σ/γ. Ако $f,\ g \in \Lambda^k$, при што $f \overset{i}{+}_k g = h$ во Λ^k, тогаш имаме $h\, \alpha\, f \overset{i}{+} g$ во Σ, од што следува дека пресликувањето:

$$\xi^k : f \to f^\gamma \tag{56}$$

е хомоморфизам од Λ^k во Λ. Со $\tilde{\Lambda}^k$ ќе ја означуваме подалгебрата $\xi^k(\Lambda^k)$ од Λ. Јасно е дека унијата $\tilde{\Phi}$ од фамилијата $\{\Lambda^k \mid k \in K\}$ е генераторно множество за алгебрата Λ. Ќе покажеме дека;:

$$f, g \in \Phi \Rightarrow (f\,\gamma\, g \Leftrightarrow f = g), \tag{57}$$

од што ќе следува дека секој од хомоморфизмите ξ^k е мономорфизам, а и дека фамилијата $\{\tilde{\Lambda}^k \mid k \in K\}$ е дисјунктна.

Пред се, ако се има предвид тоа што Σ е слободно генерирана со Φ, добиваме дека ако $f \in \Lambda^k \subseteq \Phi$, тогаш не постои $g \in \Sigma$, таков што $g\, \alpha\, f$, а и дека (во тој случај)

$$f\, \alpha\, g \Rightarrow g = f_1 \overset{i}{+} f_2,\ f = f_1 \overset{i}{+}_k f_2 \text{ во } \Lambda^k. \tag{58}$$

Од тоа следува дека:

$$\begin{aligned} f \in \Lambda^k \Rightarrow \{((\exists\, g_1, \ldots, g_{s-1} \in \Sigma)\, f \alpha g_1 \alpha \ldots \alpha g_{s-1} \alpha g) \Leftrightarrow \\ ((\exists\, f_0, \ldots, f_s \in \Lambda^k)\ f = f_0 \overset{i_1}{+}_k \ldots \overset{i_s}{+}_k f_s \text{ во } \Lambda^k \\ g = f_0 \overset{i_1}{+} \ \ldots \overset{i_s}{+} f_s \text{ во } \Sigma)\}. \end{aligned} \tag{59}$$

Да претпоставиме сега дека f и g се определени како во (59) и нека h е елемент од Σ таков што $h\alpha g$. Според тоа h и g ги имаат следниве облици:

$$\begin{aligned} h &= h_0 \overset{j_1}{+} \ldots \overset{j_{s-1}}{+} h_{s-1} \\ g &= h_0 \overset{j_1}{+} \ldots \overset{j_r}{+} (h'_r \overset{i}{+} h''_r) \overset{j_{r+1}}{+} \ldots \overset{j_{s-1}}{+} h_{s-1}, \end{aligned} \tag{60}$$

каде што претставувањето на h е канонично, а и освен тоа $h_r = h' \overset{i}{+}_k h''$ во Λ^k. Претставувањето на g во (60) не мора да биде канонично, но ако се има предвид тоа што алгебрата е слободна, добиваме дека со конечно пати применување на равенствата (2) и (3) од обликот на g даден во (60) може да се добие обликот од (59). Од тоа следува дека и во алгебрата Λ^k е точно следново равенство:

$$h_0 \overset{j_1}{+}_k \dots \overset{j_{s-1}}{+}_k h_{s-1} = h_0 \overset{j_1}{+}_k \dots \overset{j_r}{+}_k (h'_r \overset{i}{+}_k h''_r) \overset{j_{r+1}}{+}_k \dots \overset{j_{s-1}}{+}_k h_{s-1}$$

Со извршената дискусија докажавме дека:

$$\begin{aligned} & f \in \Lambda^k \ \&\ h \in \Sigma \Rightarrow \\ & \{f \gamma h \Leftrightarrow ((\exists f_0, \dots, f_s \in \Lambda^k,\ i_1, \dots, i_s \in N^0) \\ & \qquad f = f_0 \overset{i_1}{+}_k \dots \overset{i_s}{+}_k f_s \text{ во } \Lambda^k \\ & \qquad g = f_0 \overset{i_1}{+} \dots \overset{i_s}{+} f_s \text{ во } \Sigma))\}, \end{aligned} \tag{61}$$

од што заправо и следува (57).

Добиените резултати ни дозволуваат секоја од алгебрите Λ^k да ја сметаме за подалгебра на Λ, а тоа го постигнуваме, имено, на тој начин што ставаме: $f = f^{\gamma}$ за секој $f \in \Phi$.

Да претпоставиме сега дека Λ е алгебра на сместувања, а $\varphi_k : \Lambda^k \to \Lambda'$ фамилија хомоморфизми. Имајќи го предвид тоа што дадената фамилија $\{\Lambda^k \mid k \in K\}$ е дисјунктна, добиваме дека постои еднозначно определено пресликување $\xi : \Phi \to \Lambda'$ кое што е проширување од дадената фамилија хомоморфизми φ_k, па според тоа ќе имаме и:

$$(\forall f \in \Phi)\ [\xi(f)] = [f],\ |\xi(f)| = |f|. \tag{62}$$

Користејќи го сега тоа што Σ е слободно генерирана со Φ добиваме дека ξ може да се прошири до хомоморфизам $\eta : \Sigma \to \Lambda'$, а имено η се дефинира со:

$$\begin{aligned} & \eta(f) = \xi(f) \text{ за } f \in \Phi \\ & \eta(f_0 \overset{i_1}{+} \dots \overset{i_n}{+} f_n) = \xi(f_0) \overset{i_1}{+} \dots \overset{i_n}{+} \xi(f_n), \end{aligned} \tag{63}$$

каде што $f_v \in \Phi$.

Да претпоставиме сега дека $f, g \in \Sigma$ и $f \alpha g$, при што f и g се определени (51) односно (51′) каде што е точно и (52). Тогаш, имаме:

$$\begin{aligned} \eta(g) &= \xi(f_0) \overset{i_1}{+} \dots \overset{i_r}{+} (\xi(f'_r) \overset{i}{+} \xi(f''_r)) \dots \overset{i_s}{+} \xi(f_s) \\ &= \xi(f_0) \overset{i_1}{+} \dots \overset{i_r}{+} \xi(f_r) \overset{i_{r+1}}{+} \dots \overset{i_s}{+} \xi(f_s) \\ &= \eta(f), \end{aligned}$$

а од тоа следува дека $\gamma \subseteq \ker \eta$, па значи η индуцира (еднозначно) хомоморфизам $\psi : \Lambda \to \Lambda'$, при што $\psi(f^\gamma) = \eta(f)$.

Ако $f \in \Lambda^k$, тогаш имаме:

$$\psi(f) = \psi(f^\gamma) = \eta(f) = \varphi_k(f),$$

т. е. добиваме дека рестрикцијата $\psi | \Lambda^k$ од ψ на Λ^k е дадениот хомоморфизам φ_k.

Со сето тоа покажавме дека алгебрата Λ ги има особините а) и б), а јасно е дека две алгебри со тие особини се изоморфни, па значи доказот на теоремата е комплетирн.

Од докажаната теорема следува дека секоја фамилија дисјунктни алгебри на сместувања има слободен производ во категоријата од алгебри на сместувања, но да забележиме дека за егзистенцијата на слободниот производ не е неопходна претпоставката за дисјунктност, што се гледа од следнава.

ПОСЛЕДИЦА. Ако $\{\Lambda^k | k \in K\}$ е колекција од алгебри на сместувања, тогаш постои една и (до изоморфизам) само една алгебра на сместувања Λ со следниве особини:

а) Постои фамилија мономорфизми $\varphi_k : \Lambda^k \to \Lambda$, таква што $\{\varphi_k(\Lambda^k) | k \in K\}$ е фамилија дисјунктни подалгебри од Λ, и притоа Λ е генерирана од унијата на таа фамилија.

б) Ако Λ' е алгебра на сместувања и ако $\psi_k : \Lambda^k \to \Lambda'$ е фамилија хомоморфизми, тогаш постои еднозначно определен хомоморфизам $\psi : \Lambda \to \Lambda'$ таков што $\psi_k = \psi \varphi_k$ за секој $k \in K$.

Доказ. Ако ставиме $\Lambda_k^k = \Lambda^k \times \{k\}$ добиваме дсијунктна фамилија $\{\Lambda^k | k \in K\}$ алгебри на сместувања. Потоа, се применува резултатот од докажаната теорема.

4. Претставување на алгебри на сместувања како алгебри на сместувања на операции

Како што споменавме и во **1.12** за една алгебра на сместување Λ велиме дека е алгебра на операции ако постои множество A такво што Λ е изоморфна со некоја подалгебра од алгебрата на векторски операции $\Omega(A)$. Целта на овој дел е да ја докажеме следнава

ТЕОРЕМА. Секоја алгебра на сместувања е алгебра на операции.

Доказ. Нека Λ е алгебра на сместувања и нека

$$E = \{a, e_{21}, e_{22}, \ldots, e_{n1}, \ldots, e_{nn}, \ldots\} \tag{64}$$

е множество дисјунктно со Λ при што ставаме:

$$|a| = 0, \ |e_{nn}| = m, \ [x] = 1 \text{ за секој } x \in E. \tag{65}$$

Со $\mathscr{E}$ ја означуваме алгебрата што е слободно генерирана со Е, а со Φ слободниот производ на $\mathscr{E}$ и Λ. Освен, тоа, со Σ ја означуваме алгебрата што е слободно генерирана со $\Lambda \cup \mathscr{E}$, па според тоа $\Phi = \Sigma/\gamma$, каде што конгруенцијата γ е определена со помош на α како што е наведено во претходниот дел. (Имено, α а определена со (53), а γ е конгруенцијата на Σ генерирана со α). Во Φ ја определуваме минималната конгруенција τ така што во факторалгебрата $\Gamma = \Phi/\tau$ да важи равенството (28) за секои $f, g \in \Gamma$, $i: i + [g] \leqslant |f|$, и $a_v \in \Gamma_{1,0} = A$. Според особината **1.12** пресликувањето $\varphi: f \to \tilde{f}$ каде што $\tilde{f} \in \Omega(A)$ е определено со (29) и (29′), е хомоморфизам од Γ во $\Omega(A)$. Ќе покажеме подолу дека τ ги раздвојува елементите од Λ, од што ќе следува дека Λ може да се смета за подалгебра на Γ, па според тоа хомоморфизмот φ индуцира хомоморфизам $\psi = \varphi | \Lambda$ од Λ во $\Omega(A)$. Потоа, ќе покажеме дека ψ е мономорфизам, со што ќе го комплетираме доказот на теоремата.

(i) Ќе дадеме прво експлицитен опис на конгруенцијата τ. За таа цел, да ја означиме со u левата страна на (28), а со v десната страна од истото равенство. Ако:

$$t = h_0 \overset{i_1}{+} \ldots \overset{i_r}{+} u \overset{i_{r+1}}{+} h_{r-1} + \ldots \overset{i_s}{+} h_s$$

$$w = h_0 \overset{i_1}{+} \ldots \overset{i_r}{+} v \overset{i_{r+1}}{+} h_{r+1} + \ldots \overset{i_s}{+} h_s, \tag{66}$$

тогаш пишуваме $t \rho w$. Притоа, можеме да претпоставиме дека $h_v \in \Lambda \cup \mathrm{E}$ и дека едниот од збировите е каноничен, а тогаш и вториот збир е каноничен. Јасно е дека:

$$t \rho w \Rightarrow [t] = [w] \;\&\; |t| = |w|$$

и дека

$$t \rho w \Rightarrow (t \overset{i}{+} h) \rho (w \overset{i}{+} h), \quad t \rho w \Rightarrow (h \overset{j}{+} t) \rho (h \overset{j}{+} t),$$

од што (според **1.10**. в)) следува дека τ е минималната еквивалентност во која се содржи ρ, т.е. τ е определенеа со (23) со тоа што наместо α треба да стои ρ, а τ наместо γ.

(ii) Овде ќе покажеме дека τ ги раздвојува елементите од $\Lambda \cup \mathrm{E}$. Навистина, ако $h \in \Lambda$, тогаш имајќи го предвид тоа што Φ е слободен производ на Λ и $\mathscr{E}$ добиваме дека h не може да се претстави како збир во кој што ќе фигурираат собирци од Е; ако пак $h \in \mathrm{E}$, тогаш (имајќи предвид дека Е е база на $\mathscr{E}$) h не може да се изрази како збир со повеќе од еден собирок. Од ова следува дека $\Lambda \cup \mathrm{E}$ може да се смета за подмножество од Γ, при што Λ е и подалгебра. Според тоа, рестрикцијата ψ од φ на Λ е хомоморфизам од Λ во $\Omega(A)$.

(iii) Овде ќе покажеме дека ако $f, g \in \Lambda$, при што $|f| = |g| = n$ $[f] = [g] = m$, и ако во алгебрата Φ имаме

$$e_{m\nu}\, f\, a^n = e_{m\nu}\, g\, a^n, \tag{67}$$

за секој $\nu = 1, \dots, m$, тогаш $f = g$. Тоа ќе го спроведеме во неколку етапи.

Да ја означиме со f^0 левата страна од (67), при што наместо $e_{m\nu}$ ќе пишуваме само e. Уочуваме прво дека во Φ е точно равенството $f^0 = g^0$, ако и само ако во слободната алгебра Σ имаме $f^0 \gamma g^0$, каде што релацијата γ е определена како при доказот на теоремата **3**.

Не постои $g^0 \in \Sigma$ таков што $g^0 \alpha f^0$, бидејќи само еден ,,собирок'' од f^0 припаѓа на Λ. Од друга страна,

$$f^0 \alpha g^0 \Leftrightarrow g^0 = e\,(f_0 \overset{i}{+} f_1)\, a^n = e\, f_0\, a^i f_1\, a^{n-i},$$

каде што $f_0 \overset{i}{+} f_1 = f$ во Λ. Да претпоставиме дека:

$$f = f_0 \overset{i_1}{+} f_1 \overset{i_2}{+} \dots \overset{i_k}{+} f_k \tag{68}$$

во Λ, при што десната страна има каноничен вид. Ако

$$g^0 = e\,(f_0 \overset{i_1}{+} \dots \overset{i_k}{+} f_k)\, a^n \text{ во } \Sigma, \tag{69}$$

тогаш g^0 може да се претстави во канонична форма на следниов начин:

$$g^0 = e f_0 a^{j_1} \overset{i_1-j_1}{+} f_1 a^{j_2-j_1} \overset{i_2-j_2}{+} f_2 a^{j_3-j_2} + \dots \overset{i_{k-1}-j_{k-1}}{+} f_{k-1} a^{j_k-j_{k-1}}\; f_k a^{n-j_k}, \tag{69'}$$

каде што:

$$j_k = i_k,\; j_{\nu-1} = \min\,\{i_{\nu-1},\, j_\nu\}. \tag{70}$$

Нека $g^0 \alpha h^0$. Тогаш h^0 се добива од g^0 на тој начин што некој од собирците f_r се замени со $g'_r \overset{i}{+} g''_r$, при што во Σ имаме $f_r = g'_r \overset{i}{+} g''_r$. Според тоа, во Σ имаме:

$$\begin{aligned} h^0 &= e\,(f_0 \overset{i_1}{+} \dots \overset{i_r}{+} (g'_r \overset{i}{+} g''_r) \overset{i_{r+1}}{+} \dots \overset{i_k}{+} f_k)\, a^n \\ &= e f_0 \dots \overset{i_r-j_r}{+} (g'_r \overset{i}{+} g''_r) \dots a^{n-j_k}, \end{aligned}$$

каде што во Λ имаме:

$$\begin{aligned} f_0 \overset{i_1}{+} \dots \overset{i_r}{+} (g'_r \overset{i}{+} g''_r) \overset{i_{r+1}}{+} \dots \overset{i_k}{+} f_k &= f_0 \overset{i_1}{+} \dots \overset{i_r}{+} f_r \overset{i_{r+1}}{+} \dots \overset{i_k}{+} f_k \\ &= f. \end{aligned}$$

Со тоа покажавме дека: постојат $g_1^0, \dots, g_{k-1}^0 \in \Sigma$ такви што $f^0 \alpha g_1^0 \alpha \dots \alpha g_{k-1}^0 \alpha g^0$, ако и само ако g^0 е од облик (69) при што е точно и равенството (68).

Да претпоставиме сега дека се точни равенствата (68) и (69) (т.е. (69′)) и дека $h^0 \alpha g^0$. Го претставуваме h^0 во облик:

$$h^0 = h' \overset{r}{+} h \overset{p_1}{+} g_1 \overset{p_2}{+} \dots \overset{p_s}{+} g_s, \tag{71}$$

при што $h = f_\nu \overset{i}{+} f_\lambda$ во Λ и

$$g_0 = h' \overset{r}{+} (f_\nu \overset{i}{+} f_\lambda) \overset{p_1}{+} g_1 \overset{p_2}{+} \dots \overset{p_s}{+} g_s. \tag{69′′}$$

Освен тоа, претпоставуваме дека $h, g_1, \dots, g_s \in \Lambda \cup E$, $h' \in \Sigma$ и дека збирот од десната страна на (71) има каноничен облик; елементот h' е исто така претставен како каноничен збир на елементи од $\Lambda \cup E$, но тој збир не го пишуваме експлицитно. Според тоа, ако се напише каноничниот вид на h', (71) е каноничното претставување на h како збир на елементи од $\Lambda \cup E$, а тоа претставување е единствено бидејќи се работи во слободната алгебра Σ. Претставувањето на g^0 во (69′′) не мора да биде канонично, но со конечно многу пати применувања на равенствата (2) и (3) може да се дојде до канонична форма, а тоа ние подолу и ќе го спроведеме.

Прво, од (69′) со помош на (2), добиваме:

$$g^0 = h' \overset{r}{+} f_\nu \overset{i+r}{+} f_\lambda \overset{p_1}{+} g_1 \overset{p_2}{+} \dots + g_s,$$

при што, ако се има предвид дека $[h] = [f_\nu]$, $h' \overset{r}{+} f_\nu$ е во каноничен вид. Ако $p_1 + [g_1] > i + r$, тогаш целата десна страна на последното равенство ќе има каноничен вид. Во случај тоа да не биде исполнето, со помош на равенството (3), добиваме:

$$g = h' \overset{r}{+} f_\nu \overset{p_1}{+} g_1 \overset{i+r+|g_1|-[g_1]}{+} f_\lambda \overset{p_2}{+} g_2 \overset{p_3}{+} \dots \overset{p_s}{+} g_s,$$

каде што сега

$$h' \overset{r}{+} f \overset{p_1}{+} g_1$$

има канонична форма. Да ставиме:

$$\begin{aligned} q_0 = i + r,\ q_\zeta &= q_{\zeta-1} + |g_\zeta| - [g_\zeta] \\ &= i + r + |g_1| + \dots + |g_\zeta| - [g_1] - \dots - [g_\zeta], \end{aligned} \tag{72}$$

и да претпоставиме дека:

$$p_{\zeta+1} + [g_{\zeta+1}] \leqslant q_\zeta \ \text{за}\ \zeta < \xi,\ p_{\xi+1} + [g_{\xi+1}] > q_\xi. \tag{73}$$

Тогаш, добиваме:

$$g = h' \overset{r}{+} f \overset{p_1}{+} g_1 \overset{p_2}{+} \dots \overset{p_\xi}{+} g_\xi \overset{q_\xi}{+} f_\lambda \overset{p_{\xi+1}}{+} g_{\xi+1} + \dots \overset{p_s}{+} g_s, \qquad (69''')$$

при што сега десната страна има каноничен вид, од што следува дека таа се совпаѓа со десната страна на (69′). Сравнувајќи ги десните страниа на равенствата (69′) и (69‴) добиваме дека:

$$r = i_\nu - j_\nu,$$

$$_\lambda - j_\lambda = q = i + i_\nu - j_\nu + |g_1| + \dots + |g_\xi| - [g_1] - \dots - [g_\xi] \qquad (74)$$

$$= i + i_\nu - j_\nu + |f_{\nu+1}| + \dots + |f_{\lambda-1}| - [f_{\nu+1}] - \dots - [f_{\lambda-1}]$$

$$- (j_{\nu+1} - j_\nu) - (j_{\nu+2} - j_{\nu+1}) - \dots - (j_\lambda - j_{\lambda-1}),$$

т. е.

$$i_\lambda = i + i_\nu + |f_{\nu+1}| + \dots + |f_{\lambda-1}| - [f_{\nu+1}] - \dots - [f_{\lambda-1}]. \qquad (74')$$

Можат на сличен начин да се изразат и броевите $p_1, p_2, \dots, p_s$, но ние тоа нема да го направиме експлицитно. Неравенсвата (73) го добиваат следниот вид:

$$i_\zeta - j_\zeta + [f_\zeta] \leqslant i + i_\nu - j_\zeta + |f_{\nu+1}| + \dots + |f_{\zeta-1}| - [f_{\nu+1}] - \dots - [f_{\zeta-1}]$$

т. е. (73′)

$$i + [f_\zeta] \leqslant i + i_\nu + |f_{\nu+1}| + \dots + |f_{\zeta-1}| - [f_{\nu+1}] - \dots - [f_{\zeta-1}].$$

Од сето тоа следува:

$$h^0 = e f_0 \dots \overset{i_\nu - j_\nu}{+} f_{\nu-1} a^{j_\nu - j_{\nu-1}} \overset{i_\nu - j_\nu}{+} h a^{j_{\nu+1} - j_\nu} \overset{i_{\nu+1} - j_{\nu+1}}{+} f_{\nu+1} a^{j_{\nu+2} - j_{\nu+1}}$$

$$\dots \overset{i_{\lambda-1} - j_{\lambda-1}}{+} f_{\lambda-1} a^{j_{\lambda+1} - j_{\lambda-1}} \overset{i_{\lambda+1} - j_{\lambda+1}}{+} f_{\lambda+1} a^{j_{\lambda+2} - j_{\lambda+1}} \dots a^{n - j_k} \qquad (71')$$

$$= e (f_0 \overset{i_1}{+} \dots \overset{i_\nu}{+} h \overset{i_{\nu+1}}{+} \dots \overset{i_{\lambda-1}}{+} f_{\lambda-1} \overset{i_{\lambda+1}}{+} \dots \overset{i_k}{+} f_k) a^n,$$

каде што:

$$f_0 \overset{i_1}{+} \dots \overset{i_\nu}{+} h \overset{i_{\nu+1}}{+} f_{\nu+1} + \dots \overset{i_{\lambda-1}}{+} f_{\lambda-1} \overset{i_{\lambda+1}}{+} f_{\lambda+1} + \dots \overset{i_k}{+} f_k$$

$$= f_0 \overset{i_1}{+} \dots \overset{i_\nu}{+} (f_\nu \overset{i}{+} f_\lambda) \overset{i_{\nu+1}}{+} f_{\nu+1} + \dots \overset{i_{\lambda-1}}{+} f_{\lambda-1} \overset{i_{\lambda+1}}{+} f_{\lambda+1} + \dots \overset{i_k}{+} f_k$$

$$= f_0 \overset{i_1}{+} \dots \overset{i_k}{+} f_k$$

$$= f.$$

Со тоа покажавме дека во слободната алгебра Σ имаме:

$$f^0 \gamma g^0 \Leftrightarrow \{g = e(f_0 \overset{i_1}{+} \ldots \overset{i_k}{+} f_k)\, a^n \text{ во } \Sigma$$
$$f = f_0 + \ldots + f_k \text{ во } \Lambda\},$$

од што следува дека:

$$efa^n = ega^n \text{ во } \Phi \Rightarrow f = g,$$

што и беше задачата на целата оваа дискусија.

(iv) Со слични расудувања како и во (iii) се покажува дека ако $f, g \in \Lambda$ и ако во Γ е точно равенството (67), тогаш во Λ имаме $f = g$, а со тоа би се комплетирал доказот на теоремата.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ѓ. Чупона, За финитарните операции, Год. Зборн. Прир. матем. факултет, Скопје 12 (1959) 7—49.

[2] H. I. Whitlook, A Composition Algebra for Multiplace Functions, Math. Annalen 157 (1964) 167—177

[3] B. Schweizer and A. Sklar, The Algebra of Multiplace Vector-Valued Functions, Bull. Amer. Math. Soc. (1967) 510—515.

[4] P. M. Cohn, Universal Algebra, New York 1965

[5] V. D. Belousov, Balanced Identities in Algebras of Quasigroups, University of Waterloo 1969.

[6] Ѓ. Чупона, За алгебрите на сместувања, Год. Зборн. Прир. матем. факултет, Скопје 20 (1970) Секц. А, 15—24.

[7] В. Д. Белоусов, Позиционые алгебры с подстановками, Вопросы теории квазигрупп и луп, Кишинев 1971, 131—139.

G. Čupona

A CLASS OF PARTIAL ALGEBRAS

(S u m m a r y)

The object of this paper is a class of algebras which is an abstract characterezation of the class of vector-valued operations on a set A. In the the first part of the paper, we give some necessary definitions, and in the second and third ones the existence of free generated algebras and free products is proved. In the forth part it is proved that each algebra of the considered class is a subalgebra of the algebra of vector-valued operations on a set.

We notice that the class of algebras considered in the papers [3] and [6] is a subclass of the class which is described here, and that we use the same terminology as in the special case. We also notice that following the ideas of the paper [3] it can be defined a class of partial algebras which is slightly different from the one considered here.

1. Insertion algebras. Let Λ be a set and $f \to [f]$, $f \to |f|$ two mappings from Λ itno the set N of nonnegative integers, such that $[f] \in N \setminus \{0\} = N^+$. Assume that $\{\overset{i}{+} \mid i \in N\}$ is a collection of partial binary operations on Λ such that the following propositions **1.1**, **1.2** and **1.3** are satisfied.

1.1 If $f, g \in \Lambda$, $i \in N$, then

$$f \overset{i}{+} g \in \Lambda \Leftrightarrow i + [g] \leqslant |f|,$$

and

$$[f \overset{i}{+} g] = [f],\ |f \overset{i}{+} g| = |f| + |g| - [g]. \tag{1}$$

1.2 $f, g, h \in \Lambda$, $j + [h] \leqslant |g|$, $i + [g] \leqslant |f| \Rightarrow$

$$f \overset{i}{+} (g \overset{j}{+} h) = (f \overset{i}{+} g) \overset{i+j}{+} h. \tag{2}$$

1.3 $f, g, h \in \Lambda$, $j + [h] \leqslant i$, $i + [g] \leqslant |f|$, $j + [g] + [h] \leqslant |f| + |g| \Rightarrow$

$$(f \overset{i}{+} g) \overset{j}{+} h = (f \overset{j}{+} h) \overset{i+|h|-[h]}{+} g. \tag{3}$$

If these axioms are satisfied then we say that $\Lambda(|\,|, [\,]; \overset{i}{+} \mid i \in N)$ is an insertion algebra.

By Λ_{mn} will be denoted the set of elements $f \in \Lambda$ such that $[f] = m$, $|f| = n$. Therefore Λ is a disjoint union of the collection of sets (some of which may be empty) $\{\Lambda_{mn} \mid m \in N^+, n \in N\}$.

If Λ is an insertion algebra, and if $f_0, f_1, \dots, f_n \in \Lambda$, $i_1, i_2, \dots, i_n \in N$ are such that:

$$i_{\lambda+1} \leqslant \sum_0^{\lambda} |f_\nu| - \sum_1^{\lambda+1} [f_\nu],\ (1 \leqslant \lambda \leqslant n-1) \tag{4}$$

then the following „continued sum" can be defined:

$$f = (\dots((f_0 \overset{i_1}{+} j_1) \overset{i_2}{+} f_2)\dots) \overset{i_n}{+} f_n$$

$$= f_0 \overset{i_1}{+} f_1 \overset{i_2}{+} \dots \overset{i_n}{+} f_n. \tag{5}$$

If, in addition,

$$i_{\lambda+1} + [f_{\lambda+1}] > i_\lambda \quad (1 \leqslant \lambda \leqslant n-1), \tag{6}$$

then the right side of (5) is said to be a canonical continued sum. It can be easily seen that if f is defined by (5) then:

$$[f] = [f_0],\ |f| = \sum_0^n |f_\nu| - \sum_1^n [f_\nu]. \tag{7}$$

If in (5) we have: $i_1 = i_2 = \ldots = i_n = 0$ then the following notation will be used:

$$f = f_0 f_1 \ldots f_n = f_0 f_1^n. \tag{5'}$$

The notions of subalgebras, homomorphisms, congruences, factoralgebras, free algebras and free products are defined in the usual manner, and these definitions will be not stated here explicity.

2. Free insertion algebras

The class of free insertion algebras will be described in the following

THEOREM. Let $\{\Phi_{mn} \mid m \in N^+,\ n \in N\}$ be a collection of disjoint sets, and let Φ be the union of the sets of this collection. Two mappings $f \to [f]$ and $f \to |f|$ are defined by:

$$f \in \Phi_{mn} \Rightarrow [f] = m \;\&\; |f| = n. \tag{8}$$

Denote by Σ the set of all formal sums:

$$f_0 \overset{i_1}{+} \ldots \overset{i_n}{+} f_n, \tag{9}$$

where $f_\nu \in \Phi$ and $i_1, \ldots, i_n$ are nonnegative integers such that (4) and (6) are satisfied. (For $n=0$, (9) reduces to f_0, i. e. $\Phi \subseteq \Sigma$) The mappings $f \to [f]$ and $f \to |f|$ are defined by (7), where f is used for the formal sum (9).

Assume now that $f = f_0 \overset{i_1}{+} \ldots \overset{i_n}{+} f_n \in \Sigma$, $g \in \Phi$, and $i \in N$ are such that $i + [g] \leqslant |f|$. Then $f \overset{i}{+} g$ is defined by:

$$f \overset{i}{+} g = f_0 \overset{i_1}{+} f_1 + \ldots \overset{i_{s-1}}{+} f_{s-1} \overset{i}{+} g \overset{i'_s}{+} f_s \overset{i'_{s+1}}{+} \ldots \overset{i'_n}{+} f_n, \tag{10}$$

where s is the greatest number ($1 \leqslant s \leqslant n+1$) such that:

$$i + [g] > i_{s-1}, \tag{11}$$

and $i'_{s+\nu}$ is defined by:

$$i'_{s+\nu} = i_{s+\nu} + |g| - [g]. \tag{12}$$

More generally, if f is defined as above, $g = g_0 \overset{i_1}{+} \ldots \overset{j_k}{+} g_k \overset{j_{k+1}}{+} g_{k+1}$, and if $i + [g] \leqslant |f|$, then

$$f \overset{i}{+} g = (f \overset{i}{+} (g_0 \overset{j_1}{+} g_1 \overset{j_2}{+} \ldots \overset{j_k}{+} g_k)) \overset{i+j_{k+1}}{+} g_{k+1}. \tag{13}$$

3*

Then, $\Sigma([\,], |\,|; \overset{i}{+} | i \in N)$ is an insertion algebra, and it is in fact the algebra which is freely generated by the set Φ.

Proof. By a straight forward computation.

COROLLARY. Let Λ be an insertion algebra and $\Phi \subset \Sigma$. The algebra Λ is freely generated by Φ if and only if each element $f \in \Lambda$ can be in a unique way expressed as a canonical sum of elements of Φ.

3. Free products

The existence of free products in the class of insertion algebras will be shown here.

THEOREM. Let $\{\Lambda^k | k \in K\}$ be a collection of disjoint insertion algebras. There exists one and (within to an isomorphism) only one insertion algebra Λ satisfying the following properties:

a) Each algebra Λ^k of the given family is a subalgebra of Λ, and Λ is generated by the set:

$$\Phi = \bigcup_{k \in K} \Lambda^k.$$

b) If Λ' is an insertion algebra, and $\varphi_k : \Lambda^k \to \Lambda'$ a collection of homomorphsims, then there is one and only one homomorphism $\varphi : \Lambda \to \Lambda'$ such that $\varphi_k = \varphi | \Lambda^k$ is the restriction of φ on Λ^k.

Proof. Let Σ be the insertion algebra which is freely generated by the set Φ. If $i \in N$ then by $\overset{i}{+}$ is denoted the corresponding operation in the algebra Σ, and by $\overset{i}{+}_k$ in Λ^k. Let γ be the minimal congruence on Σ satisfying the following proposition:

$$((\exists\, k \in K)\ f \overset{i}{+}_k g = h) \Rightarrow f \overset{i}{+} g\ \gamma\ h. \tag{14}$$

Denote by Λ the factoralgebra Σ/γ, and if $f \in \Sigma$ then by f^γ will be denoted the element of Λ such that $f \in f^\gamma$. If $f \in \Lambda^k$, then we put $\xi_k(f) = f^\gamma$. Thus we get a collection of monomorphsims $\xi_k : \Lambda^k \to \Lambda$ such that Λ is generated by the union of the disjoint collection of subalgebras $\{\tilde{\Lambda}^k | \in K\}$, where $\tilde{\Lambda}^k = \xi_k(\Lambda^k)$. Therefore Λ^k may be assumed to be a subalgebra of Λ.

COROLLARY. Free products exist in the class of insertion algebras.

Proof. Let $\{\Lambda^k | k \in K\}$ be a collection of insertion algebras. If this collection is disjoint we apply the above theorem. If not, then we put

$$\tilde{\Lambda}^k = \Lambda^k \times \{k\},\ [(f, k)] = [f]_k,\ |(f, k)| = |f|_k,\ (f, k) \overset{i}{+} (g, k) = (f \overset{i}{+}_k g, k). \tag{15}$$

Thus we get a disjoint collection $\{\tilde{\Lambda}^k | k \in K\}$, and may again apply the theorem.

4. Insertion algebras of vector-valued operations.

EXAMPLE. Let A be a nonempty set, and $\Omega_{mn}(A)$ the set of all mappings from the cartesian power A^n into A^m. Therefore, $\Omega_{10}(A)=A$, $\Omega_{m0}(A)=A^m$. If $f\in\Omega_{mn}(A)$ then we put $[f]=m\&|f|=n$. Denote by $\Omega(A)$ the union of the collection $\{\Omega_{mn}(A)|m\in N^+, n\in N\}$. If $f, g\in\Omega(A)$, $i\in N$ are such that $i+[g]\leqslant|f|$, then $f\overset{i}{+}g=h\in\Omega(A)$ is defined by:

$$h(x_1,\ldots,x_{|h|})=f(x_1,\ldots,x_i,y_1,\ldots,y_{[g]},x_{i+|g|+1},\ldots,x_{|h|}),\tag{16}$$

where

$$|h|=|f|+|g|-[g], \text{ and } (y_1,\ldots,y_{[g]})=g\ (x_{i+1},\ldots,x_{i+|g|}).\tag{17}$$

By a straight forward computation it can be shown that $\Omega(A)([\ ],|\ |;\overset{i}{+}|\,i\in N)$ is an insertion algebra.

An insertion algebra Λ is said to be an algebra of operations if there is a set A and a monomorphism $\xi:\Lambda\to\Omega(A)$.

THEOREM. Each insertion algebra is an algrebra of operations.

Proof. Let $\mathscr{E}$ be the insertion algebra freely generated by the union E of the collection $\{E_{mn}\,|\,m\in N^+, n\in N\}$ of disjoint sets, such that:

$$E_{10}=\{a\},\ E_{1n}=\{e_{n1},\ldots,e_{nn}\},\ E_{mn}=\varnothing,\ \text{if } m\neq 1,\tag{18}$$

It is also assumed that $\Lambda\cap\mathscr{E}=\varnothing$. Denote by $\sum$ the free product of the algebras $\mathscr{E}$ and Λ, and by τ the minimal congruence on Σ such that:

$$e_{[f]\nu}(f\overset{i}{+}g)\,a_1^{|f|+|g|-[g]}\qquad\tau\tag{19}$$

$$e_{[f]\nu}\,f\,a_1^{i}(e_{[g]1}\,g\,a_{i+1}^{i+|g|})\ldots(e_{[g][g]}\,g\,a_{i+1}^{i+|g|})\,a_{i+|g|+1}^{|f|+|g|-[g]}\quad,$$

for all: $a_\nu\in\Sigma_{10}$, f, $g,\in\Sigma$, $i:i+[g]\leqslant|f|$, $\nu:1\leqslant\nu\leqslant[f]$. Denote by Γ the corresponding factoralgebra Σ/τ, and put $A=\Gamma_{10}$. If $f\in\Lambda_{mn}$ then $\tilde{f}\in\Omega_{mn}(A)$ is defined by:

$$\tilde{f}(a_1,\ldots,a_n)=(e_{m1}\,fa_1{}^n,\ldots,e_{mm}\,fa_1{}^n).\tag{20}$$

(For $n=0$, $m\neq 1$ we have:

$$\tilde{f}=(e_{m1}\,f,\ldots,e_{mm}\,f),\quad\text{and}\quad\tilde{f}=f,\ \text{for } n=0,\ m=1.)$$

The mapping ξ: $f\to\tilde{f}$ is a monomorphism from Λ into $\Omega(A)$.