

[m, n] -ГРУПОИДИ

Б. Триеновски и Г. Чуйона

1. Во оваа работа се обопштува поимот за операција, а потоа се изнесуваат неколку резултати за новиот поим; всушност, се обопштуваат резултатите од работите [1] и [2].

Нека е M непразно множество и $f: M^{m+1} \rightarrow M^{n+1}$ (еднозначно) преликување. За f велиме дека е $[m, n]$ -групоид на M , или само $[m, n]$ -групоид, сметајќи го M за фиксно. Ако е $f(x_0, x_1, \dots, x_m) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$, ставајќи $f_k(x_0, x_1, \dots, x_m) = y_k, k=0, 1, \dots, n$, ќе добиеме $n+1$ ($m+1$)-тарни операции на M што ги викаме *компоненти* на f и пишуваме $f=(f_0, \dots, f_n)$. Изучувањето на $[m, n]$ -групоидите може да се спроведе преку нивните компонентни операции. Тие, меѓутоа, можат да се изучуваат и директно, како што е направено во оваа работа.

Натаму, за покус, наместо $f(\dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_s, \dots)$ ќе пишуваме $f(\dots, x_k^s, \dots)$; x_k^{k-1} ќе означува празен симбол, додека x_k^{k-s} за $s > 1$ нема смисла. Наместо $f(\dots, \underbrace{x, x, \dots, x}_k, \dots)$ ќе пишуваме $f(\dots, x^k, \dots)$.

Нека е $m > n$. За $[m, n]$ -групоидот f велиме дека е (i, j) -асоцијативен, $0 \leq i < j \leq m - n$, ако за секои $x_k \in M, k=0, 1, \dots, 2m - n$, е точно равенството:

$$f(x_0^{i-1}, f(x_i^{i+m}), x_{i+m+1}^{2m-n}) = f(x_0^{j-1}, f(x_j^{j+m}), x_{j+m+1}^{2m-n}) \quad (1)$$

За f велиме дека е $[m, n]$ -полугрупа, ако е (i, j) -асоцијативен $[m, n]$ -групоид за секои $0 \leq i < j \leq m - n$.

Ако за секои $x_0, x_1, \dots, x_m \in M$ е

$$f(e_1^k, x_0^n, e_{k+1}^{m-n}) = (x_0, x_1, \dots, x_n), 0 \leq k \leq m - n, \quad (2)$$

слогот $(e_1, e_2, \dots, e_{m-n})$ ќе го викаме k -неутрален за f . Ако во k -неутралниот слог сите елементи се еднакви со еден елемент e , тогаш e ќе го викаме k -не-

уиџрален елемент за f . Ако, пак, e е κ -неутрален елемент за секој $0 \leq \kappa \leq m-n$, тогаш за него ќе велиме дека е *неуиџрален* елемент за f .

Елементот $a \in M$ припаѓа на *центриарој* од f ако за секои $0 \leq j, k \leq m+1$ и секое $x_v \in M$, $v=1, 2, \dots, m$ е

$$f(x_1^{j-1}, a, x_j^m) = f(x_1^{k-1}, a, x_k^m). \quad (3)$$

Ако е f $[n+s, n]$ -группоид, ќе ставиме:

$$f^1(x_0^{n+s}) = f(x_0^{n+s}), f^k(x_0^{n+ks}) = f(x_0^{s-1}, f^{k-1}(x_0^{n+ks})), \quad (4)$$

Основните резултати од оваа работа се содржани во следниве две теореми:

Теорема 1. Нека е f $(j, j+k)$ -асоцијативен $[m, n]$ -групоид, $k \geq 1$, со барем еден неуиџрален елемент. Нека е s најолемној зеднички делител на j, k и $m-n$ ($m-n=rs$). Тогаш f е $(ts, (t+p)s)$ -асоцијативен $[m, n]$ -групоид за секои $t=0, 1, \dots$ и $p=1, \dots$, така што $t+p \leq r$. Уиџре повеќе, постои $(0, s)$ -асоцијативен $[n+s, n]$ -групоид g така што за секои $x_0, x_1, \dots, x_{n+sr} \in M$ е

$$f(x_0^{n+rs}) = g^r(x_0^{n+rs}). \quad (5)$$

Теорема 2. Нека е f (j, k) -асоцијативен $[m, n]$ -групоид за еден пар j, k : $0 \leq j < k \leq m-n$, и нека е e неуиџрален елемент за f . Тогаш f ќе биде $[m, n]$ -полугрупа ако, и само ако, e припаѓа на неговото центриар. Во пошврден случај постои $[n+1, n]$ -полугрупа g така што за секои $x_0, x_1, \dots, x_{n+r} \in M$, $r = m-n$, е

$$f(x_0^{n+r}) = g^r(x_0^{n+r}). \quad (5')$$

Во врска со теоремата 2 се покажува дека: ако е f $(j, j+k)$ -асоцијативен $[m, n]$ -групоид со неуиџрален елемент e и ако е $k = 1, 2$, тогаш e припаѓа на центриарот од f .

2. Нека е f $[m, n]$ -группоид и нека ставиме:

$$f^*(x_0, x_1, \dots, x_m) = f(x_m, \dots, x_1, x_0).$$

Очевидна е следнава

Лема 2. 1. $[m, n]$ -Групоидот f^* е (i^*, j^*) -асоцијативен ако, и само ако, f е (i, j) -асоцијативен, каде што $i^* = m-n-j$, $j^* = m-n-i$.

Лема 2. 2. Ако е f $(j, j+k)$ -асоцијативен $[m, n]$ -групоид, $k \geq 1$, со барем еден неуиџрален елемент e и ако е $j \geq k$, тогаш f е и $(j-k, j)$ -асоцијативен,

$$\begin{aligned}
& \text{Доказ. } f(x_0^{j-k-1}, f(x_{j-k}^{j-k+m}), x_{j-k+m+1}^{2m-n}) = \\
& = f(e^{j+k}, f(x_0^{j-k-1}, f(x_{j-k}^{j-k+m}), x_{j-k+m+1}^{2m-n}), e^{m-n-j-k}) = \\
& = f(e^j, f(e^k, x_0^{j-k-1}, f(x_{j-k}^{j-k+m}), x_{j-k+m+1}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-j-k}) = \\
& = f(e^j, f(e^k, x_0^{j-1}, f(x_j^{j+m}), x_{j+m+1}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-j-k}) = \\
& = f(e^{j+k}, f(x_0^{j-1}, f(x_j^{j+m}), x_{j+m+1}^{2m-n}), e^{m-n-j-k}) = \\
& = f(x_0^{j-1}, f(x_j^{j+m}), x_{j+m+1}^{2m-n}).
\end{aligned}$$

Од лемите 2.1 и 2.2 следува:

Лема 2. 3. Ако е $f(j, j+k)$ -асоцијативен $[m, n]$ -групоид, $k \geq 1$, со барем еден неутрален елемент и ако е $m - n \geq j + 2k$, тогаш f е $(j+k, j+2k)$ -асоцијативен.

Лема 2. 4. Нека е неутрален елемент во $(j, j+k)$ -асоцијативниот $[m, n]$ -групоид f . Тогаш се точни равенствата:

$$f(e^k, x_0^{m-k}) = f(x_0^{m-k}, e^k), \quad (6)$$

$$f(e^{k-j}, x_0^{m-k+j}) = f(x_0^{j-1}, e^{k-j}, x_j^{m-k+j}) = f(x_0^{m-k+j}, e^{k-j}), \quad j < k, \quad (7)$$

$$f(x_0^{j-1}, e^{k-j}, x_j^{m-k+j}) = f(x_0^{n+2j}, e^{k-j}, x_{n+2j+1}^{m-k+j}), \quad j < k. \quad (8)$$

Доказ. Доказот на (6) и (7) се добива со едноставна модификација на доказите на соодветните равенства од лемата 2.1 од [2]. Да го покажеме тоа, на пример, за равенството $f(e^{k-j}, x_0^{m-k+j}) = f(x_0^{m-k+j}, e^{k-j})$, каде што е $j < k$.

$$\begin{aligned}
& f(e^{k-j}, x_0^{m-k+j}) = f(e^j, f(e^{k-j}, x_0^{m-k+j}), e^{m-n-j}) = \\
& = f(e^k, x_0^{j-1}, f(x_j^{m-k+j}, e^k), e^{m-n-j-k}) = \\
\text{— (6) —} & = f(x_0^{j-1}, f(x_j^{m-k+j}, e^k), e^{m-n-j}) = \bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n).
\end{aligned}$$

Ако е $m < 2k$, земајќи предвид дека е $j+k \leq m-n$, т.е. $m-n-j-k \geq 0$, имаме:

$$\bar{y} = f(x_0^{m-k+j}, e^{2k-m-1}, f(e^{m+1}), e^{m-n-k-j}) = f(x_0^{m-k+j}, e^{k-j}).$$

За $2k \leq m < 3k$, пак, имаме:

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= f(x_0^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m-k+j}, e^{2k}), e^{m-n-j-k}) = \\
&= f(e^j, f(x_0^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m-k+j}, e^{2k}), e^{m-n-j-k}), e^{m-n-j}) = \\
&= f(e^j, x_0^{k-1}, f(x_k^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m-k+j}, e^{2k}), e^{m-n-j}), e^{m-n-j-k}) = \\
&= f(e^j, x_0^{k-1}, f(x_k^{m-k+j}, e^{2k-m-1}, f(e^{m+1}), e^{m-n-j-k}), e^{m-n-j-k}) = \\
&= f(e^j, x_0^{k-1}, f(x_k^{m-k+j}, e^{2k-j}), e^{m-n-j-k}) = \\
&= f(e^j, f(x_0^{m-k+j}, e^{k-j}), e^{m-n-j}) = f(x_0^{m-k+j}, e^{k-j}).
\end{aligned}$$

Од горното е јасно како ќе се добие доказот на равенството и во случајот $sk \leq m < (s+1)k$ за $s > 2$.

Да го докажеме сега разнеството (8):

$$\begin{aligned}
&f(x_0^{n+2j}, e^{k-j}, x_{n+2j+1}^{m-k+j}) = \\
&= f(x_0^{j-1}, f(e^{m-n}, x_j^{n+j}), x_{n+2j+1}^{n+2j}, e^{k-j}, x_{n+2j+1}^{m-k+j}) = \\
&= f(x_0^{j-1}, e^k, f(e^{m-n-k}, x_j^{n+2j}, e^{k-j}), x_{n+2j+1}^{m-k+j}) = \\
- (7) - &= f(x_0^{j-1}, e^k, f(e^{m-n-j}, x_j^{n+2j}), x_{n+2j+1}^{m-k+j}) = \bar{z}.
\end{aligned}$$

Ако е $k > n+j$ добиваме:

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= f(x_0^{j-1}, f(e^{m+1}), e^{k-n-j-1}, x_j^{m-k+j}) = \\
&= f(x_0^{j-1}, e^{k-j}, x_j^{m-k+j}),
\end{aligned}$$

а за $k \leq n+j$, истиот резултат се добива на следниов начин:

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= f(x_0^{j-1}, f(e^{m+k-n-j}, x_j^{n+2j-k}), x_{n+2j-k+1}^{m-k+j}) = \\
&= f(x_0^{j-1}, e^{k-j}, x_j^{m-k+j}).
\end{aligned}$$

Лема 2. 5. Нека е f ($j, j+k$)-асоцијативен $[m, n]$ -пруидиоид, $k \geq 1$, со барем еден неутрален елемент. Тогаш f е $(0, m-n)$ -асоцијативен, $(0, k)$ -асоцијативен и $(0, s)$ -асоцијативен $[m, n]$ -пруидиоид, каде што s е најголемиот заеднички делител од j и k .

Доказ. Нека е e неутрален елемент за f . Со оглед на лемата 2.2 можеме да претпоставиме дека е $j < k$. Користејќи ги равенствата од претходната лема добиваме:

$$\begin{aligned}
& f(x_0^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m+j+k}), x_{m+j+k+1}^{2m-n}) = \\
& = f(e^j, f(x_0^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m+j+k}), x_{m+j+k+1}^{2m-n}), e^{m-n-j}) = \\
& = f(e^j, x_0^{k-1}, f(x_k^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m+j+k}), x_{m+j+k+1}^{2m-n}), e^k, e^{m-n-j-k}) = \\
& = f(e^j, f(e^j, x_0^{k-1}, f(x_k^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m+j+k}), x_{m+j+k+1}^{2m-n}), e^k), e^{m-n-j-k}, e^{m-n-j}) = \\
& = f(e^{2j}, x_0^{k-j-1}, f(x_{k-j}^{k-1}, f(x_k^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m+j+k}), x_{m+j+k+1}^{2m-n}), e^k), e^{m-n-j}, e^{m-n-j-k}) = \\
& = f(e^{2j}, x_0^{k-j-1}, f(e^k, x_{k-j}^{k-1}, f(x_k^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m+j+k}), x_{m+j+k+1}^{2m-n}), e^k), e^{m-n-j-k}), \\
& \qquad \qquad \qquad e^{m-n-j-k}) = \\
& = f(e^{2j}, x_0^{k-j-1}, f(e^j, f(e^{k-j}, x_{k-j}^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m+j+k}), x_{m+j+k+1}^{2m-n}), e^{m-n-j}), e^{m-n-j-k}) = \\
& = f(e^{2j}, x_0^{k-j-1}, f(e^{k-j}, x_{k-j}^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m+j+k}), x_{m+j+k+1}^{2m-n}), e^{m-n-j-k}) = \\
& = f(e^{2j}, x_0^{k-j-1}, f(x_{k-j}^{k-1}, e^{k-j}, x_k^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m+j+k}), x_{m+j+k+1}^{2m-n}), e^{m-n-j-k}) = \\
& = f(e^{2j}, x_0^{k-j-1}, f(x_{k-j}^{k-1}, f(e^{k-j}, x_k^{m+j}), x_{m+j+1}^{2m-n}), e^{m-n-j-k}) = \\
& = f(e^{2j}, x_0^{k-j-1}, f(x_{k-j}^{k-1}, f(x_k^{m+j}, e^{k-j}), x_{m+j+1}^{2m-n}), e^{m-n-j-k}) = \\
& = f(e^j, f(e^j, x_0^{k-1}, f(x_k^{m+j}, e^{k-j}), x_{m+j+1}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k-j}) = \\
& = f(e^j, f(e^j, f(x_0^m), x_{m+1}^{m+j}, e^{k-j}, x_{m+j+1}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-j-k}) = \\
& = f(e^j, f(e^k, f(x_0^m), x_{m+1}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-j-k}) = \\
& = f(e^{j+k}, f(f(x_0^m), x_{m+1}^{2m-n}), e^{m-n-j-k}) = f(f(x_0^m), x_{m+1}^{2m-n}),
\end{aligned}$$

па f е $(0, j+k)$ -асоцијативен $[m, n]$ -групоид.

Ако ја примениме конечен број пати лемата 2.3 по однос на $(j, j+k)$ -асоцијативноста, ќе добиеме дека f е (j_1, j_1+k) -асоцијативен $[m, n]$ -групоид, каде што е $j_1+k \leq m-n < j_1+2k$. За $j_1+k=m-n$ оттука ќе следува дека f е $(j+k, m-n)$ -асоцијативен, што заедно со докажаната $(0, j+k)$ -асоцијативност ја повлекува $(0, m-n)$ -асоцијативноста на f . Ако е $j_1+k < m-n$, според лемата 2.1 и доказот за $(0, j+k)$ -асоцијативноста, се добива дека f е $(j, m-n)$ -асоцијативен; од $(0, j+k)$ и $(j, j+k)$ -асоцијативноста се добива дека f е и $(0, j)$ -асоцијативен, така што, конечно, пак се добива дека f е $(0, m-n)$ -асоцијативен $[m, n]$ -групоид.

Да докажеме дека f е $(0, \kappa)$ -асоцијативен, ќе ја користиме веќе споменатата $(0, j)$ -асоцијативност:

$$\begin{aligned}
 f(f(x_0^m), x_{m+1}^{2m-n}) &= f(e^j, f(f(x_0^m), x_{m+1}^{2m-n}), e^{m-n-j}) = \\
 &= f(f(e^j, f(x_0^m), x_{m+1}^{2m-n-j}), x_{2m-n-j+1}^{2m-n}, e^{m-n-j}) = \\
 &= f(f(e^j, x_0^{k-1}, f(x_k^{m+k}), x_{m+k+1}^{2m-n-j}), x_{2m-n-j+1}^{2m-n}, e^{m-n-j}) = \\
 &= f(e^j, f(x_0^{k-1}, f(x_k^{m+k}), x_{m+k+1}^{2m-n}), e^{m-n-j}) = \\
 &= f(x_0^{k-1}, f(x_k^{m+k}), x_{m+k+1}^{2m-n}).
 \end{aligned}$$

Доказот дека f е $(0, s)$ -асоцијативен $[m, n]$ -групоид е ист со доказот на лемата 2.3 од [2].

Доказ на теоремата 1. Нека е s најголемиот заеднички делител на j, k и $m-n$, а s_1 — најголемиот заеднички делител на j и k ; нека е $s_1 = a_1 s$. Според лемата 2.5 f е $(0, s_1)$ -асоцијативен $[m, n]$ -групоид, па ако е $a_1 = 1$, f ќе биде $(0, s)$ -асоцијативен. Ако е $a_1 > 1$ ќе ставиме $m-n = ps_1 + s_2$, $s_2 < s_1$ и, очевидно, $p > 0$. Од $(0, s_1)$ -асоцијативноста, со примена на лемата 2.3, добиваме дека f е $(0, ps_1)$ -асоцијативен, а според лемата 2.5 и $(0, m-n)$ -асоцијативен, така што тој е и $(ps_1, m-n)$ т.е. $(m-n-s_2, m-n)$ -асоцијативен. Оттука следува дека f е и $(0, s_2)$ -асоцијативен. Јасно е дека s го дели s_2 ; $s_2 = a_2 s$, при што од $s_2 < s_1$ следува дека е $a_2 < a_1$. Продолжувајќи во оваа смисла, ако е $a_2 > 1$, ќе ја добиеме низата $a_1 > a_2 > \dots > a_t = 1$, таква што за секој $v=1, 2, \dots, t$ f е $(0, s_v)$ -асоцијативен и $s_v = a_v s$. Оттука се добива дека f е $(0, s)$ -асоцијативен, па првиот дел од теоремага се добива со примена на лемите 2.2. и 2.3.

Да ставиме $m-n = rs$ и

$$g(x_0^{n+s}) = f(x_0^{n+s}, e^{(r-1)s}).$$

Добиваме:

$$\begin{aligned}
 g(g(x_0^{n+s}), x_{n+s+1}^{n+2s}) &= f(f(x_0^{n+s}, e^{(r-1)s}), x_{n+s+1}^{n+2s}, e^{(r-1)s}) = \\
 &= f(f(e^{(r-1)s}, x_0^{n+s}), x_{n+s+1}^{n+2s}, e^{(r-1)s}) = \\
 &= f(e^{(r-1)s}, x_0^{s-1}, f(x_s^{n+2s}, e^{(r-1)s})) = \\
 &= f(x_0^{s-1}, f(x_s^{n+2s}, e^{(r-1)s}), e^{(r-1)s}) = \\
 &= g(x_0^{s-1}, g(x_s^{n+2s})),
 \end{aligned}$$

т.е. g е $(0, s)$ -асоцијативен $[n+s, n]$ -групоид (во горниот доказ е користена $(0, m-n)$ -асоцијативноста на f).

Нека, на крајот, ја докажеме точноста на (5):

$$\begin{aligned} g^2(x_0^{n+2s}) &= f(x_0^{s-1}, f(x_s^{n+2s}, e^{(r-1)s}), e^{(r-1)s}) = \\ &= f(x_0^{2s-1}, f(x_{2s}^{n+2s}, e^{rs}), e^{(r-2)s}) = \\ &= f(x_0^{2s-1}, x_{2s}^{n+2s}, e^{(r-2)s}) = f(x_0^{n+2s}, e^{(r-2)s}). \end{aligned}$$

Повторена уште $r-2$ пати оваа постапка ќе не доведе до споменатото равенство. Теоремата е докажана.

3. Да го разгледаме случајот кога неутралниот елемент припаѓа на центарот на $[m, n]$ -групоидот f .

Лема 3. 1. Нека e f $(j, j+k)$ -асоцијативен $[m, n]$ -групоид, $k \geq 1$, и нека e е неутрален елемент за f . Тогаш f е $[m, n]$ -полугрупа ако и само ако e припаѓа на центарот на f .

Доказ. Нека e f $[m, n]$ -полугрупа. Користејќи го првото равенство од лемата 2.4, за $\kappa=1$, добиваме:

$$\begin{aligned} f(e, x_1^m) &= f(x_1^m, e) = f(e^{m-n-1}, f(x_1^m, e), e) = \\ &= f(e^{m-n-1}, x_1, f(x_2^m, e, e)) = \\ &= f(e^{m-n-1}, x_1, f(e, x_2^m, e)) = \\ &= f(e^{m-n-1}, f(x_1, e, x_2^m), e) = f(x_1, e, x_2^m). \end{aligned}$$

Натаму:

$$\begin{aligned} f(x_1, e, x_2^m) &= f(f(x_1, e, x_2^m), e^{m-n}) = \\ &= f(x_1, f(e, x_2^m, e), e^{m-n-1}) = \\ &= f(x_1, f(x_2, e, x_3^m), e, e^{m-n-1}) = \\ &= f(f(x_1, e, x_3^m), e^{m-n}) = f(x_1, e, x_3^m), \text{ и т.н.} \end{aligned}$$

Да претпоставиме сега дека e припаѓа на центарот на $(j, j+k)$ -асоцијативниот $[m, n]$ -групоид f . Користејќи ги асоцијативностите докажани во лемата 2.5 добиваме:

$$\begin{aligned}
f(x_0, f(x_1^{m+1}), x_{m+2}^{2m-n}) &= f(e^k, f(x_0, f(x_1^{m+1}), x_{m+2}^{2m-n}), e^{m-n-k}) = \\
&= f(f(e^k, x_0, f(x_1^{m+1}), x_{m+2}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k}) = \\
&= f(f(e^{j-1}, x_0, f(x_1^{m+1}), x_{m+2}^{2m-n-k}), e^{k-j+1}, x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k}) = \\
&= f(f(f(e^{j-1}, x_0^{m-j+1}), x_{m-j+2}^{2m-n-k}), e^{k-j+1}, x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k}) = \\
&= f(f(f(x_0^{m-j+1}, e^{j-1}), e^{k-j+1}, x_{m-j+2}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k}) = \\
&= f(f(x_0^{k-1}, f(x_k^{m-j+1}), e^k, x_{m-j+2}^m), x_{m+1}^{2m-n-k}, x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k}) = \\
&= f(f(x_0^{k-1}, f(x_k^m), e^k), x_{m+1}^{2m-n-k}, x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k}) = \\
&= f(f(f(x_0^m), e^k), x_{m+1}^{2m-n-k}, x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k}) = \\
&= f(f(e^k, f(x_0^m), x_{m+1}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k}) = \\
&= f(e^k, f(f(x_0^m), x_{m+1}^{2m-n}), e^{m-n-k}) = f(f(x_0^m), x_{m+1}^{2m-n}).
\end{aligned}$$

Така добивме дека f е $(0, 1)$ -асоцијативен $[m, n]$ -групоид, а од тоа и лемата 2.3, следува дека f е $[m, n]$ -полугрупа.

Доказ на теоремата 2. Директно следува од лемата 3.1 и теоремата 1.

4. Во врска со теоремата 2 е интересно да се види во кои случаи неутралниот елемент на еден $[m, n]$ -групоид припаѓа на неговиот центар. Во таа смисла овде ќе забележиме дека:

Ако е $f(j, j+k)$ -асоцијативен $[m, n]$ -групоид со неутрален елемент e и ако е $k = 1, 2$, тогаш е припаѓа на центарот од f .

Навистина, за $k=1$, односно за $k=2$ кога барем еден од броевите j и $m-n$ е непарен, f ќе биде $[m, n]$ -полугрупа (според теоремата 1), па од лемата 3.1 следува дека e припаѓа на центарот од f . Треба да се разгледа уште случајот кога е $k=2$ и кога и j и $m-n$ се парни. Користејќи ги $(0, 2)$ и $(0, m-n)$ -асоцијативностите на f , што следуваат од теоремата 1, добиваме:

$$\begin{aligned}
f(e^n, x_0^{m-n}) &= f(e^{m-n}, f(e^n, x_0^{m-n})) = f(f(e^m, x_0), x_1^{m-n}) = \\
(6) \quad &= f(f(e^{m-2}, x_0, e^2), x_1^{m-n}) = f(e^{n-1}, x_0, e, x_1^{m-n});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(e^{n-2}, x_0^{m-n+2}) &= f(e^2, f(e^{n-2}, x_0^{m-n+2}), e^{m-n-2}) = \\
&= f(f(e^n, x_0^{m-n}), x_{m-n+1}^{m-n+2}, e^{m-n-2}) = \\
&= f(f(e^{n-1}, x_0, e, x_1^{m-n}), x_{m-n+1}^{m-n+2}, e^{m-n-2}) = \\
&= f(e^2, f(e^{n-3}, x_0, e, x_1^{m-n+2}), e^{m-n-2}) = \\
&= f(e^{n-3}, x_0, e, x_1^{m-n+2}),
\end{aligned}$$

при што претпоставуваме дека е $n > 2$. Продолжувајќи во иста смисла ќе добиеме:

$$\text{за } n=2s+1 : f(e, x_1^m) = f(x_1, e, x_2^m);$$

$$\text{за } n=2s : f(e^2, x_1^{m-1}) = f(e, x_1, e, x_2^{m-1}).$$

Во последниов случај, користејќи го равенството $f(e^2, x_0^{m-2}) = f(x_0^1, e^2, x_2^{m-2})$, коешто се докажува исто како и првото од равенствата дадени во доказот на лемата 3.1, имаме:

$$\begin{aligned}
f(e, x_1^m) &= f(e^2, f(e, x_1^m), e^{m-n-2}) = \\
&= f(f(e^3, x_1^{m-2}), x_{m-1}^m, e^{m-n-2}) = \\
&= f(f(e, x_1, e^2, x_2^{m-2}), x_{m-1}^m, e^{m-n-2}) = \\
&= f(f(e^2, x_1, e, x_2^{m-2}), x_{m-1}^m, e^{m-n-2}) = \\
&= f(e^2, f(x_1, e, x_2^m), e^{m-n-2}) = f(x_1, e, x_2^m).
\end{aligned}$$

Така добивме дека во секој случај е

$$f(e, x_1^m) = f(x_1, e, x_2^m). \quad (9)$$

Работејќи слично како и во почетокот, тргнувајќи од $f(e^{n-1}, x_0^{m-n+1})$, можеме да добиеме:

$$\text{за } n=2s : f(e, x_1^m) = f(x_1^2, e, x_3^m);$$

$$\text{за } n=2s+1 : f(e^2, x_1^{m-1}) = f(e, x_1^2, e, x_3^{m-1}),$$

а потоа:

$$\begin{aligned}
 f(e^2, x_1^{m-1}) &= f(e, x_1^2, e, x_3^{m-1}) = \\
 &= f(f(e, x_1^2, e, x_3^{m-1}), e^{m-n}) = \\
 &= f(e, x_1, f(x_2, e, x_3^{m-1}, e^2), e^{m-n-2}) = \\
 &= f(e, x_1, f(e, x_2^{m-1}, e^2), e^{m-n-2}) = \\
 &= f(f(e, x_1, e, x_2^{m-1}), e^{m-n}) = f(e, x_1, e, x_2^{m-1}),
 \end{aligned}$$

и, на крајот:

$$\begin{aligned}
 f(e, x_1^m) &= f(e^2, f(e, x_1^m), e^{m-n-2}) = \\
 &= f(f(e^2, x_1^{m-2}), x_{m-1}^m, e^{m-n-2}) = \\
 &= f(f(e, x_1, e^2, x_2^{m-2}), x_{m-1}^m, e^{m-n-2}) = \\
 &= f(e, x_1, f(e^2, x_2^m), e^{m-n-2}) = \\
 &= f(e, x_1, f(e, x_2, e, x_3^m), e^{m-n-2}) = \\
 &= f(f(e, x_1, e, x_2, e, x_3^{m-2}), x_{m-1}^m, e^{m-n-2}) = \\
 &= f(f(e^2, x_1^2, e, x_3^{m-2}), x_{m-1}^m, e^{m-n-2}) = \\
 &= f(e^2, f(x_1^2, e, x_3^m), e^{m-n-2}) = f(x_1^2, e, x_3^m).
 \end{aligned}$$

Според тоа добивме дека е и $f(e, x_1^m) = f(x_1^2, e, x_3^m)$, а со помош на ова равенство, како и со равенството (9), лесно може да се комплетира доказот на тврдењето од забелешката.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Трпеновски и Ѓ. Чупона, Финитарни асоцијативни операции со неутрални елементи, Билтен на ДМФ од НРМ, XII (1961), 15–24.

[2] Б. Л. Трпеновски, Делумно асоцијативни n -групоиди со неутрални елементи, Билтен на ДМФ од СРМ, XIV (1963), 5–16.

B. Trpenovski and G. Čupona

ON [m, n]-GROUPOIDS

(Summary)

Any mapping $f: G^{m+1} \rightarrow G^{n+1}$, G non-empty, is said to be an $[m, n]$ -groupoid on G . An $[m, n]$ -groupoid, $m > n$, is said to be (i, j) -associative, $0 \leq i < j \leq m - n$, if for every $x_k \in G$, $k = 0, \dots, 2m - n$ the following holds:

$$\begin{aligned} f(x_0, \dots, x_{i-1}, f(x_i, \dots, x_{i+m}), x_{i+m+1}, \dots, x_{2m-n}) = \\ = f(x_0, \dots, x_{j-1}, f(x_j, \dots, x_{j+m}), x_{j+m+1}, \dots, x_{2m-n}). \end{aligned}$$

An element $a \in G$ is in the centre of f if for every $x_k \in G$, $k = 1, 2, \dots, m$ and every $0 \leq i, j \leq m + 1$,

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_i, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_j, \dots, x_m),$$

If $f(\underbrace{e, \dots, e}_k, x_0, \dots, x_n, e, \dots, e) = (x_0, \dots, x_n)$ for every $x_j \in G$, $j = 0, 1, \dots, n$ and every $k = 0, 1, \dots, m - n$, then e is said to be a neutral element for f .

Let f be an $[n + s, n]$ -groupoid on G and let us put:

$$f^1(x_0, \dots, x_{n+s}) = f(x_0, \dots, x_{n+s}),$$

$$f^k(x_0, \dots, x_{n+ks}) = f(x_0, \dots, x_{s-1}, f^{k-1}(x_s, \dots, x_{n+ks})).$$

In this note the following theorems are proved:

Theorem 1. Let f be a $(j, j+k)$ -associative $[m, n]$ -groupoid, $m > n$, $k \geq 1$, containing a neutral element. If s is the greatest common divisor of j , k and $m - n$ ($m - n = rs$), then f is $(ts, (t+p)s)$ -associative for every $t = 0, 1, \dots, p = 1, 2, \dots$ such that $t + p \leq r$. Furthermore, there exists a $(0, s)$ -associative $[n + s, n]$ -groupoid g such that for every $x_k \in G$, $k = 0, 1, \dots, n + rs$ the following holds:

$$f(x_0, \dots, x_{n+rs}) = g^r(x_0, \dots, x_{n+rs}).$$

Theorem 2. If f is a (j, k) -associative $[m, n]$ -groupoid, $m > n$, for some pair (j, k) containing a neutral element e , then f is (j, k) -associative for every pair (j, k) ($0 \leq j < k \leq m - n$) if and only if e is in the centre of f . If that is the case, then there exists a $(0, 1)$ -associative $[n + 1, n]$ -groupoid g such that for every $x_k \in G$, $k = 0, 1, \dots, n + r$, $r = m - n$, the following holds:

$$f(x_0, \dots, x_{n+r}) = g^r(x_0, \dots, x_{n+r}).$$

If f is $(j, j+k)$ -associative $[m, n]$ -groupoid with neutral element e and if $k = 1, 2$, then e belongs to the centre of f .