ЗА ЕДЕН ВИД СИСТЕМИ ОД КВАЗИГРУПИ

Бранко Л. ТРПЕНОВСКИ

1. Оваа работа е инспирирана од работата [1] во којашто е изучена структурата на операциите од определени множества десно инверзибилни операции, дефинирани на исто непразно множество, при што за секои две операции од соодветното множество е исполнета релацијата за дистрибутивноста. Овде, наместо релацијата за дистрибутивноста, се зема релацијата ∂ што подолу се дефинира, а наместо да се разгледуваат множества од десно инверзибилни операции, се разгледува поспецијалниот случај, кога операциите се и десно и лево инверзибилни.

Нека M е непразно множество, а A една бинарна операција дефинирана на M, т.е. A е (еднозначно) пресликување од $M \times M$ во M. За пократко, бинарните операции натаму ги викаме само операции. За операцијата A велиме дека е инверзибилна во M, ако за секои a, b од M, постојат такви, притоа еднозначно определени, x, $y \in M$ што е:

$$(1) \qquad A\ (x,\ a) = b, \qquad A\ (a,\ y) = b.$$

Паротот $M\ (A)$ што се состои од множеството M и инверзибилната операција A дефинирана на M го викаме квазигрупа. Ако нема потреба посебно да го истакнеме множеството M, квазигрупата $M\ (A)$ ќе ја означуваме просто со A, па во таа смисла и за самата операција A ќе велиме дека е квазигрупа (дефинирана на M).

Нека сега A и B се две операции дефинирани на исто множество M. За A велиме дека е во релација ∂ со B, пишуваме $A \partial B$, ако за секои a, b, $c \in M$ е точно равенството:

$$(2) \qquad A\ [a,\ B\ (b,\ c)] = B\ [b,\ A\ (a,\ c)].$$

Забележуваме дека, очевидно, ако е $A \partial B$, тогаш е и $B \partial A$.

Дефиниција 1. Нека $\mathcal{Q}$ е множество од квазигрупи дефинирани на исто непразно множество M. Ако за секои A, $B \in \mathcal{Q}$ е $A \partial B$, тогаш за $\mathcal{Q}$ велиме дека е Дедекиндов систем од квазигрупи на M.

Точна е следната

Лема 1. Множеството $\mathcal{Q}$ од квазигрупи на M е Дедекиндов систем од квазигрупи на M ако, и само ако, за секои a, b, $c \in M$ е точно равенството:

$$A\{a,\ B\ [A(a,\ b),\ c]\} = B[A(a,\ b),\ A(a,\ c)].$$

Доказ. Ако во (2) b го замениме со $A(a,\ b)$, ќе добиеме дека е точно равенството (3). Обратно, за било кои $a,\ b \in M$ постои $y \in M$ таков што е $A(a,\ y) = b$, а тогаш добиваме:

$$A[a, B(b, c)] = A\{a, B[A(a, y), c]\} = B[A(a, y), A(a, c)] = B[b, A(a, c)].$$

Ако M е делумно подредено множество, а A и B операциите пресек и унија, соодветно, тогаш со (2) (при претпоставката $a \geqslant b$), или со (3) се дефинираат Дедекиндовите структури, што и го појаснува името на системот $\mathcal{Q}$ од дефиницијата 1.

Да изнесеме еден пример за Дедекиндов систем од квазигрупи:

Пример. Нека $M(+,.)$ е поле и нека $\mathcal{Q}(M)$ е множеството од сите операции на M од облик:

$$A(x, y) = px + y + q, \tag{4}$$

каое што $p \neq 0$ и q се фиксни елементи од M за дадена операција A. Јасно е дека секоја од операциите од обликот (4) е квазигрупа, а лесно се проверува дека е $A \partial B$ за секои $A, B \in \mathcal{Q}(M)$.

2. Ќе изнесеме неколку особини на Дедекиндовите системи од квазигрупи. Притоа, ако не е инаку кажано, за $\mathcal{Q}$ ќе сметаме дека е Дедекиндов систем од квазигрупи на M.

Лема 2. Ако за некои $a, b \in M$ е $A(a, b) = b$, каде што $A \in \mathcal{Q}$, тогаш за секој $x \in M$ е $A(a, x) = x$.

Доказ. Нека $A(a, b) = b$. Ако $a \neq b$, нека го избереме $c \in M$ таков што е $A(c, b) = a$. Тогаш добиваме дека:

$$A(a, a) = A[a, A(c, b)] = A[c, A(a, b)] = A(c, b) = a.$$

Така, во секој случај имаме дека $A(a,\ a) = a$. Нека $x \in M$. Постои $y \in M$ таков што е $A(y,\ a) = x$, па добиваме:

$$A(a, x) = A[a, A(y, a)] = A[y, A(a, a)] = A(y, a) = x,$$

со што лемата е докажана.

Ако A е операција дефинирана на M и ако $A(a, a) = a$, $a \in M$, тогаш за елементот a велиме дека е идемпотент за операцијата A.

Лема 3. За секоја квазигрупа $A \in \mathcal{Q}$ постои, еднозначно определен идемпотент $a \in M$.

Доказ. Нека $A \in \mathcal{Q}$ и $b \in M$. Постои $a \in M$ таков што е $A(a, b) = b$, а тогаш, според лемата 2, имаме дека $A(a, a) = a$, т.е. a е идемпотент за A. Нека $c \in M$ е идемпотент за A. Пак според лемата 2 добиваме дека $A(c, a) = a$, па од $A(a, a) = A(c, a)$, бидејќи A е квазигрупа, следува дека е $a = c$.

Нека во $\mathcal{Q}$ ја определуваме релацијата ρ со:

$$A\,\rho\,B \Leftrightarrow (\forall\, x, y, z \in M)\ A[x, B(y, z)] = B[x, A(y, z)]. \tag{5}$$

Лема 4. ρ е релација за еквивалентност во $\mathcal{Q}$.

Доказ. Рефлексивноста и симетричноста на ρ се очевидни. Да ја докажеме транзитивноста. Нека $A\rho B$ и $B\rho C$ и нека $x, y, z \in M$. Постојат такви $u, v \in M$ што е $B(u, v) = z$. Добиваме дека:

$$\begin{aligned} A[x, C(y, z)] &= A\{x, C[y, B(u, v)]\} = A\{x, B[u, C(y, v)]\} = \\ &= B\{x, A[u, C(y, v)]\} = B\{x, C[y, A(u, v)]\} = \\ &= C\{x, B[y, A(u, v)]\} = C\{x, A[y, B(u, v)]\} = \\ &= C[x, A(y, z)], \end{aligned}$$

т.е. $A \rho C$.

Теорема 1. На секој Дедекиндов систем $\mathcal{Q}$ од квазигрупи на M може да се определи таква релација за еквивалентност ρ, што ако $A \rho B$ и ако е $A(a, b) = B(a, b)$ за еден пар $a, b \in M$, тогаш е $A = B$.

Доказ. Според лемата 4, релацијата ρ определена со (5) е еквивалентност на $\mathcal{Q}$. Нека $A \rho B$ и $A(a, b) = B(a, b) = c$. За секој $x \in M$ добиваме дека е:

$$A(x, c) = A[x, B(a, b)] = B[x, A(a, b)] = B(x, c).$$

Постои $d \in M$ таков што е $A(d, c) = c$, а според претходното равенство, тогаш е и $B(d, c) = c$. Од лемата 2 следува дека $A(d, y) = y = B = (d, y)$ за секој $y \in M$. Нека $z, u \in M$. Добиваме:

$$A(z, u) = A[z, B(d, u)] = B[z, A(d, u)] = B(z, u),$$

и значи, $A = B$.

Да ставиме:

$$(6) \qquad D_a = \{A \in \mathcal{Q} \mid A(a,a) = a,\ a \in M\}.$$

Лема 5. $\mathcal{Q}$ е дисјунктна унија од фамилијата $\{D_a \mid a \in K\}$ од множества квазигрупи на M, каде што $K = \{b \in M \mid B(b, b) = b, B \in \mathcal{Q}\}$.

Доказ. Според дефиницијата на K е јасно дека $\bigcup_{a\in K} Da \subseteq \mathcal{Q}$. Обратно, ако $A \in \mathcal{Q}$, според лемата 3, постои $a \in M$ таков што е $A(a, a) = a$, т.е. $A \in D_a$, па $\mathcal{Q} \subseteq \bigcup_{a\in K} D_a$. Ако $C \in D_a \cap D_b$, според лемата 3 имаме дека е $a = b$.

Во натамошните разгледувања ќе се ограничиме на оние Дедекиндови системи од квазигрупи на M за кои се исполнети условите од следната

Дефиниција 2. Дедекиндовиот систем $\mathcal{Q}$ од квазигрупи на M го викаме полн, ако: (*i*) за секои $a, b, c \in M$, во секоја класа по еквиваленцијата ρ постои квазигрупа A, таква што е $A(a, b) = c$; (*ii*) во секое од множествата D_a, за секои $x, y, z \in M$, $x \neq a$, $y \neq z$, постои квазигрупа B, таква што е $B(x, y) = z$; (*iii*) за секои $H, N \in D_a$ и секои $x, y \in M$ е точно равенството $H[N(x, y), a] = N[H(x, a), H(y, a)]$.

Точна е следната

Теорема 2. Нека $\mathcal{Q}$ е полн Дедекиндов систем од квазигрупи на M. Тогаш за секој $a \in M$, $D_a \neq \varnothing$, а $\mathcal{Q}$ е дисјунктна унија од фамилијата $\{D_a \mid a \in M\}$. Притоа, (i) пресекот на секое од множествата D_a, со секоја од класите по еквиваленцијата ρ, содржи точно една квазигрупа од $\mathcal{Q}$; (ii) $\mathcal{Q}$ е максимален Дедекиндов систем од квазигрупи на M (т.е. кон $\mathcal{Q}$ не може да се додаде нова квазигрупа на M, така што проширениот систем да остана полн Дедекиндов).

Доказ. Според (i) од дефиницијата 2 следува дека за секој $a \in M$, во секоја од класите по ρ, постои квазигрупа A таква што $A(a, a) = a$. Тоа значи дека $D_a \neq \varnothing$ и дека и пресекот на секоја од класите по ρ со секое од множествата D_a не е празен; според теоремата 1, пак, тој пресек не може да содржи повеќе од една квазигрупа. Дека $\mathcal{Q}$ е дисјунктна унија од фамилијата $\{D_a \mid a \in M\}$, следува од лемата 5. На крајот останува уште да го докажеме делот (ii). Претподно ќе докажеме дека, ако за некои $x, y \in M$, $x \neq a$, е $A(x, y) = B(x, y)$, каде што $A, B \in D_a$, тогаш е $A = B$.

Да го избереме $u \neq y$. Поради $x \neq a$, постои во D_a квазигрупа C таква што е $C(x, y) = u$. Тогаш е:

$$A, (x, u) = A\ [x, C(x, y)] = C\ [x,\ A(x, y)] = \\ = C[x, B(x, y)] = B\ [x, C(x, y)] = B(x, u).$$

Специјално, за $u = a$ имаме дека е $A(x, a) = B(x, a)$. Нека $z \in M$, $z \neq a$. Поради $x \neq a$, постои $K \in D_a$, таква што е $K(z, a) = x$. Натаму, постои $v \in M$ со особината $K(v, a) = z$. Поради $z \neq a$ имаме дека и $v \neq a$, па постои таква квазигрупа $L \in D_a$ што е $L(z, a) = v$. Така имаме дека:

$$L(x, a) = L\ [K(z, a), a] = K\ [L(z, a), L(a, a] = K\ (v, a) = z.$$

Потоа добиваме и:

$$A(z, a) = A\ [L(x, a), a] = L\ [A(x, a), A(a, a)] = \\ = L\ [B(x, a), a] = B\ [L(x, a),\ L(a, a)] = B(z, a),$$

т.е. за секој $z \neq a$ е точно равенството $A(z, a) = B\ (z, a)$. Поради $A, B \in D_a$, тоа равенство е точно и за $z = a$. Оттука пак, според доказот на првото од горните равенства, следува дека и за секој $w \in M$ е $A(z, w) = B\ (z, w)$, т.е. $A = B$.

Да ја докажеме сега максималноста на $\mathcal{Q}$. Нека F е квазигрупа на M и нека системот $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \cup \{F\}$ е полн Дедекиндов. Според лемата 3 имаме дека $F(a, a) = a$, за некој $a \in M$, т.е. $D'_a = D_a \cup \{F\}$. Нека $x \neq a$ и y се било како избрани, и нека $F(x, y) = z$; тогаш мора да е $x \neq z$. Бидејќи $\mathcal{Q}$ е полн, постои $A \in D_a$ таква што е $A(x, y) = z$. Така, во D'_a го имаме равенството $A(x, y) = F\ (x, y)$, $x \neq a$, од каде што, како што видовме погоре, следува дека $A = F$, т.е. $F \in \mathcal{Q}$. Теоремата е докажана.

3. Ќе ја опишеме структурата на квазигрупите во секое од множествата D_a. За системот $\mathcal{Q}$ ќе претпоставуваме натаму дека е полн

Дедекиндов систем од квазигрупи на M, макар што, за пократко, тоа нема насекаде експлицитно да биде нагласено.

Лема 6. Постои $A \in D_a$, таква што за секои $x, y \in M$ е $A(x, y) = A(y, x)$.

Доказ. Нека $u \neq a$. Постои квазигрупа $A \in D_a$ со особината $A(u, a) = u$. Очевидно е дека $A(a, a) = a$, така што ќе покажеме дека за секој $x \in M$, $x \neq a$ е $A(x, a) = x$. Постои квазигрупа $K \in D_a$ таква што е $K(u, a) = x$, па:

$$A(x, a) = A[K(u, a), a] = K[A(u, a), A(a, a)] = K(u, a) = x.$$

За било кои $x, y \in M$ сега добиваме дека:

$$A(x, y) = A\ [x, A(y, a)] = A\ [y, A(x, a)] = A\ (y, x).$$

Лема 7. Нека $0 \in M$ и нека $A \in D_0$ е квазигрупата со особината од лемата 6. Ако ставиме $A(x, y) = x + y$, ќе добиеме дека $M(+)$ е комутативна група, во којашто 0 е неутралниот елемент.

Доказ. Поради тоа што A е комутативна квазигрупа, се' што треба да се докаже е асоцијативноста на „$+$“. Имаме:

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= A\ [A(x, y), z] = A\ [z, A(x, y)] = \\ &= A\ [x, A(z, y)] = A\ [x, A(y, z)] = x + (y + z).\end{aligned}$$

Очевидно е дека 0 е неутралниот елемент во $M(+)$.

Нека множеството M има барем два различни елементи и нека ставиме $M^* = M \setminus \{0\}$. Избираме елементи $1 \neq 0$. Тогаш, според доказот на теоремата 2, за секој $x \in M^*$ постои еднозначно определена квазигрупа $X \in D_0$, којашто ќе ја викаме кореспондентна за x, таква што е $X(1,0) = x$.

Лема 8. Нека $x, y \in M$ и нека $X \in D_0$ е кореспондентната квазигрупа на x. Ако ставиме $xy = X(y, 0)$, ќе добиеме дека $M^*(.)$ е комутативна група со неутрален елемент 1.

Доказ. Нека $x, y \in M^*$ и нека $X, Y \in D_0$ се нивни кореспондентни квазигрупи. Добиваме:

$$xy = X(y,0) = X[Y(1,0), 0] = Y[X(1,0), X(0,0)] = Y(x, 0) = yx,$$

што ја докажува комутативноста на множењето.

Нека сега $x, y, z \in M^*$ и нека X и Z се кореспондентните квазигрупи на x и z, соодветно. Користејќи ја штотуку докажаната комутативност, добиваме дека:

$$\begin{aligned}x(yz) &= X(yz,0) = X(zy,0) = X\ [Z(y,0),0] = \\ &= Z[X(y,0),\ Z(0,0)] = Z(xy,0) = z(xy) = (xy)z,\end{aligned}$$

па множењето е и асоцијативно.

На крајот, нека $a, c \in M$ и нека B е кореспондентната квазигрупа на b. Поради решливоста по x на равенката $B(x,0) = c$ во M^*, зашто од $c \neq 0$ следува дека и $x \neq 0$, добиваме дека е решлива по x во M^* и равенката $bx = c$, што заедно со комутативноста го завршува доказот на лемата.

Теорема 3. Нека M е множество со барем два различни елементи, а $\mathcal{Q}$ полн Дедекиндов систем од квазигрупи на M. Тогаш во M можат да се определат операциите „$+$" и „$\cdot$", така што $M(+,.)$ да биде поле, а секоја квазигрупа $B \in D_0$ да има облик $B(x,y) = px + y$, $p \neq 0$.

Доказ. Да ја избереме квазигрупата $A \in D_0$ како и во лемата 7, нека $1 \neq 0$ и нека операциите „$+$" и „$\cdot$" ги дефинираме како во последните две леми. Операцијата „$\cdot$" ќе ја додефинираме на M со тоа што ќе ставиме да биде $x0 = 0x = 0$ за секој $x \in M$. За да покажеме дека $M(+,.)$ е поле, потребно е да ја докажеме уште дистрибутивноста на множењето спрема собирањето. Нека $x, y, z \in M$. Ако барем еден од овие елементи е еднаков со 0, тогаш на очевиден начин е точно равенството $x(y+z) = xy + xz$. Да земеме дека x, y, $z \in M^*$. Нека X е кореспондентната квазигрупа на x. Имаме:

$$x(y+z) = X(y+z,0) = X[A(y,z),0] = A[X(y,0), X(z,0)] = xy + xz.$$

Да го докажеме вториот дел од теоремата. Нека $B \in D_0$ и нека $B(1,0) = p$. Поради $1 \neq 0$, добиваме дека и $p \neq 0$. Ако $y \neq 0$, постои квазигрупа $K \in D_0$ таква што е $K(y,0) = y$. Така добиваме дека:

$$\begin{aligned} B(x,y) &= B[A(x,0),y] = B[A(x,0), K(y,0)] = K[y, B[A(x,0),0]] = \\ &= K[y, A[B(x,0), B(0,0)]] = A[B(x,0), K(y,0)] = B(x,0) + y = \\ &= px + y. \end{aligned}$$

За $y = 0$ добиваме дека $B(y,0) = px = px + 0$. Теоремата е докажана.

4. Да ја опишеме сега структурата на сите квизигрупи од полниот Дедекиндов систем $\mathcal{Q}$.

Теорема 4. Нека M е множество со барем два различни елементи и нека $\mathcal{Q}$ е полн Дедекиндов систем од квазигрупи на M. Тогаш на M можат да се определат операциите собирање и множење, така што $M(+,.)$ да биде поле, а секоја квазигрупа $C \in \mathcal{Q}$ да има облик $C(x,y) = px + y + q$, $p \neq 0$; притоа, $\mathcal{Q}$ ги содржи сите квазигрупи од тој вид, т.е. $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(M)$ од примерот изнесен на почетокот. Ако ставиме $C = C_{pq}$ кога $C(x,y) = px + y + q$, имаме дека: (*i*) $C_{pq} \, \rho \, C_{p'q'} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow p = p'$; (*ii*) $C_{pq} \in D_s \Leftrightarrow ps + q = 0$.

Доказ. Полето $M(+,.)$ ќе го конструираме како и во претходната теорема. Со оглед на тоа што (*i*) и (*ii*) лесно се проверуваат, ќе докажеме само дека секоја квазигрупа $C \in \mathcal{Q}$ го има обликот изнесен во теоремата и дека $\mathcal{Q}$ ги содржи сите квазигрупи од тој вид.

Според теоремата 1, C припаѓа на некоја класа по ρ, а според теоремата 2, во пресекот на таа класа со D_0 се најдува единствената квазигрупа B. Според претходната теорема имаме дека е $B(x,y) = px + y$, $p \neq 0$. Ако е $C \neq B$, добиваме дека $C(0,0) = q \neq 0$, па, земајќи предвид дека $C \rho B$, добиваме:

$$C(x,y) = C[x,A(y,0)] = A[y,C(x,0)] = A\{y,C[x,B(0,0)]\} =$$
$$= A\{y,B[x, C(0,0)]\} = A[y,B(x,q)] = y + B(x,q) = px + y + q.$$

Дека секоја квазигрупа $C(x,y) = px + y + q$, $p \neq 0$, припаѓа на $\mathcal{Q}$, следува од максималноста на $\mathcal{Q}$, установена во теоремата 2.

5. При конструкцијата на полето $M(+,.)$ тргнуваме од едно фиксно множество D_0 и еден фиксен елемент $1 \neq 0$. Нека $M(\oplus,_0)$ е полето конструирано како и полето $M(+,.)$, но со помош на множеството $D_{0'}$ и елементот $1' \neq 0'$. Ќе ја докажеме следната теорема:

Теорема 5. Полињата $M(+,.)$ и $M(\oplus,_0)$ се изоморфни.

Доказ. Ќе го разгледаме прво случајот кога $0 = 0'$. Ако $B \in D_0$, тогаш е $B(x,y) = px + y$, $p \neq 0$ во $M(+,.)$, додека $B(x,y) = p'ox + y$, $p' \neq 0$ во $M(+,_0)$. Да ставиме $\varphi p = p'$, $p, p' \neq 0$, $\varphi 0 = 0$. Лесно се проверува дека φ е пермутација на M. Притоа имаме:

$$px + y = \varphi p o x + y. \tag{7}$$

Ако во (7) замениме, по ред $x = 1'$ и $y = 0$, ќе добиеме:

$$\varphi p = p.1', \; px = \varphi p o x. \tag{8}$$

Со помош на (8) добиваме дека:

$$\varphi x + \varphi y = x.1' + y.1' = (x+y).1' = \varphi(x+y),$$
$$\varphi x o \varphi y = x.\varphi y = x(y.1') = (xy).1' = \varphi(xy),$$

па φ е изоморфизам.

Да земеме сега дека $0 \neq 0'$. но нека $1 = 1'$. Нека $C \in D_{0'}$. Тогаш е $C(x,y) = p'ox \oplus y$, $p' \neq 0'$, додека пак во полето $M(+,.)$, за истата квазигрупа, имаме дека $C(x,y) = px + y + q$, $p \neq 0$. Поради тоа што е $C(0',0') = 0'$, добиваме дека е $p.0' + 0' + q = 0'$, т.е. $q = -p.0'$. Ако ставиме $\psi 0 = 0'$ и $\psi p = p'$, ќе добиеме дека ψ е пермутација на M. Натаму имаме:

$$\psi x o y \oplus z = xy + z - x.0'. \tag{9}$$

Од (9) за $y = 1$, односно, $z = 0'$, добиваме:

$$\psi x \oplus z = x + z - x.0', \; \psi x o y = xy + 0' - x.0', \tag{10}$$

а као во (9) замениме едновремено $y = 1$ и $z = 0'$, ќе добиеме:

$$\psi x = x + 0' - x.0'. \tag{11}$$

Земајќи ги предвид добиените равенства, добиваме дека:

$$\psi x \oplus \psi y = x + \psi y - x.0' = x + y + 0' - y.0' - x.0' = x + y + 0' - (x+y).0' = \psi(x+y),$$

$$\psi x o \psi y = x.\psi y + 0' - x.0' = x(y + 0' - y.0') + 0' - x.0' = xy + x.0' - (xy).0' + 0' - x.0' = xy - (xy).0' + 0' = \psi(xy),$$

па и ψ е изоморфизам.

Доказот на теоремата сега следува од разгледаните два специјални случаи, а поради транзитивната особина на релацијата за изоморфизам.

6. На крајот ќе направиме една забелешка во врска со условот (*iii*) од дефиницијата 2. Имено, тој услов е битен за да се добие описот изнесен во теоремата 4 за квазигрупите од полниот Дедекиндов систем. Тоа може да се види од следниот пример: нека $M(+)$ е комутативна група, а φ пермутација на M. Тогаш множеството од сите операции од облик $A(x,y) = \varphi x + y + q$ е Дедекиндов систем од квазигрупи на M којшто ги задоволува условите (*i*) и (*ii*) од дефиницијата 2. Условот (*iii*), меѓутоа, не е задоволен во овој Дедекиндов систем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. Д. Белоусов*, О дистрибутивных системах операций, Матем. сб. т. 36 (1955), 479—500.

[2] *В. Д. Белоусов*, Основы теории квазигрупп и лупп, Москва (1967).

SUMMARY

ON A SYSTEM OF QUASIGROUPS

B. L. Trpenovski

A binary operation A on a non-empty set M is said to be a quasigroup on M if for every $a,b \in M$, it is an uniquely determined $x, y, \in M$ so that

$$A(x,a) = b \text{ and } A(a,y) = b.$$

Let $\mathcal{Q}$ be a set of quasigroups on M. $\mathcal{Q}$ is said to be a ∂-system of quasigroups of M if for every $a, b, c \in M$ and every $A, B \in \mathcal{Q}$ the following equation holds:

$$A[a, B(b,c)] = B[b, A(a,c)].$$

If $\mathcal{Q}$ is a ∂-system of quasigroups on M and if we define the relation ρ by

$$A \rho B \Leftrightarrow (\forall x, y, z \in M) \; A[x, B(y,z)] = B[x, A(y,z)].$$

then ρ turns out to be an equivalence of $\mathcal{Q}$.

Let us put

$$D_a = \{A \in \mathcal{Q} \mid A(a,a) = a, \; a \in M\}.$$

A ∂-system $\mathcal{Q}$ of quasigroups on M is said to be a complete one if: (i) for every $a, b, c \in M$ in each equivalence class modulo ρ there exists a quasigroup A such as $A(a, b,) = c$, (ii) in each subset D_a of $\mathcal{Q}$, for every $x, y, z \in M$, $x \neq a$, $y \neq z$, there exists a quasigroup B such as $B(x, y) = z$.

A complete ∂-system $\mathcal{Q}$ is said to be a special complete ∂-system, if for every $A, B \in D_a$, and every $x, y \in M$, the following equation holds.

$$A[B(x, y), a] = B[A(x, a), A(y, a)].$$

Fxample. Let $M(+, .)$ be a field. The set $\mathcal{Q}(M)$ of all the operations of the form

$$A(a, b) = pa + b + q, \quad p, q \in M, \ p \neq 0,$$

is a special complete ∂-system of quasigroups on M.

The main result of this note is the following

Theorem. Let M be a set containing at least two elements and let $\mathcal{Q}$ be a special complete ∂-system of quasigroups on M. Then it is possible to define two operations „ + " and „ . " on M so that $M(+, .)$ is *a* field, and $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(M)$ of the example given above. Furthermore, if $M(\oplus, o)$ is another field defined by $\mathcal{Q}$, then it is isomorphic to $M(+, .)$.

Mathematical Institutes
Skopje

Примено на 9. V. 1969