ПОДАЛГЕБРИ НА ПОЛУГРУПИ

Ѓ. Чуйона

Добро е познато ([1] стр. 185) дека секоја алгебра $A(\Omega)$ може да се смести во полугрупа S, така што за секоја операција $\omega \in \Omega$ да постои елемент $a^{\omega} \in S$, таков што $\omega\, x_0 \cdots x_n = a^{\omega}\, x_0 \cdots x_n$, за секои $x_i \in A$. Во трудот [2] (Теорема 2) се покажува дека една алгебра $A(\Omega)$ може да се смести во полугрупа, така што операциите од Ω се од облик $x_0\, a^{\omega}\, x_1 \cdots x_n$, ако, и само ако, во алгебрата $A(\Omega)$ се исполнети идентитети од облик $\omega\, \tau\, x_0 \cdots x_{n+m} = \tau\, x_0 \cdots x_{n-1}\, \omega\, x_n \cdots x_{n+m}$. Овие два резултата се слични, бидејќи тие покажуваат дека две класи подалгебри на полугрупи можат да се окарактеризираат со помош на идентитети. Но, класата подалгебри на полугрупи, чиишто операции се полиноми од облик $x_0 \cdots x_n$, не може да се окарактеризира со помош на идентитети. Тоа е покажано, имено, во трудот [3].

Во овој труд се изнесуваат два поопшта резултата во врска со подалгебрите на полугрупите. Првиот е, може да се рече, од најопшт карактер, додека вториот се однесува за една поспецијална класа подалгебри на полугрупи, но доволно општа за да се добијат, како последици на овој резултат, гореспоменатите резултати.

0. Пред да пристапиме кон формулирање на резултатите што се предмет на овој труд, ќе објасниме неколку поими и ознаки што ќе бидат употребувани понатаму.

0.1. Нека $A(\Omega)$ е алгебра. Ако ω е $n+1$-тарна операција, тогаш пишуваме $n_{\omega} = n$, а со $\omega\, x_0 \cdots x_n$ го означуваме резултатот од примената на операцијата ω на $n+1$-торката $(x_0, \cdots, x_n)$.

Нека $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_k \in \Omega$, и нека $n = n_0 + \cdots + n_k$, каде што $n_v = n_{\omega_v}$. Ако $i_1, i_2, \cdots, i_k$ е низа ненегативни цели броеви што го задоволуваат условот:

$$o \leqslant i_v \leqslant i_{v+1} \leqslant n_0 + \cdots + n_v \tag{1}$$

тогаш можеме да ја определиме следнава полиномна операција ξ:

$$\xi\, x_0 \cdots x_n = \omega_0\, x_0 \cdots x_{i_1 - 1}\, \omega_1\, x_{i_1} \cdots x_{i_k - 1}\, \omega_k\, x_{i_k} \cdots x_n. \tag{2}$$

Множеството од сите така дефинирани полиномни операции ќе го означуваме со $[\Omega]$. Јасно е дека $\Omega \subseteq [\Omega]$ и дека, во суштина, $[\Omega]$ не зависи од носителот A на алгебрата, а само од нејзиниот тип Ω.

0.2. Нека X е бескрајно преброиво множество, а D множество дисјунктно со X. Елементите на X ќе велиме дека се слободни променливи, а тие од D — константи. Да ја означиме со F полугрупата што е слободно генерирана од множеството $X \cup D$, т.е. F се состои од сите конечни низи $y_1 y_2 \cdots y_k$, каде што $y_i \in X \cup D$. Нека Ω' е подмножество од F, што се состои од елементи со облик

$$d_0 \, x_0 \, d_1 \, x_1 \cdots d_n \, x_n \, d_{n+1}, \tag{3}$$

каде што $x_0, \cdots, x_n$ се различни слободни променливи, и $d_0, \cdots, d_{n+1}$ се константи, при што една или повеќе од нив може да биде празниот симбол. (Терминот празен симбол би можел да се изостави, ако на полугрупата F ѝ додадевме единица).

Нека S е полугрупа, а $\psi : d \to \overset{\psi}{d}$ пресликување од D во S. На секој елемент $\omega' \in \Omega'$ можеме да му придружиме $n+1$-тарна операција ω' во S определена со:

$$\omega' \, x_0 \, x_1 \cdots x_n = \overset{\psi}{d_0} \, x_0 \, \overset{\psi}{d_1} \cdots x_n \, \overset{\psi}{d_{n+1}} \tag{4}$$

каде што $\overset{\psi}{d_v}$ е празниот симбол секогаш кога d_v е празен. Притоа, $x_0, \cdots, x_n$ се сметаат за слободни променливи над S.

За една алгебра $A(\Omega)$ велиме дека е Ω'-подалгебра на полугрупата S, ако $A \subseteq S$ и ако постои биекција $\omega \to \omega'$ од Ω во Ω' при што $n_\omega = n_{\omega}'$ таква што:

$$(\forall \omega \in \Omega) \, (\forall a_0, \cdots, a_n \in A) \; \omega \, a_0 \cdots a_n = \omega' \, a_0 \cdots a_n, \tag{5}$$

каде што ω' е определена со (4).

1. Ќе го формулираме сега првиот резултат на овој труд.

ТЕОРЕМА. Нека $A(\Omega)$ е алгебра, Ω' множество полугрупни операции од облик (4), а $\omega \to \omega'$ биекција од Ω во Ω', таква што $n_\omega = n_{\omega}'$. Нека T е полугрупата што е слободно генерирана од $A \cup D$, при што претпоставуваме и дека $A \cap D$ се состои само од константите на алгебрата $A(\Omega)$. Нека α е минималната конгруенција во полугрупата T, таква што

$$\omega \, a_0 \cdots a_n = a \text{ во } A(\Omega) \Rightarrow \omega' \, a_0 \cdots a_n \, \alpha \, a \text{ во } T, \tag{6}$$

и нека β е рестрикцијата од α на A. Тогаш имаме:

(*i*) β е конгруенција во алгебрата $A(\Omega)$ и притоа алгебрата $A/\beta(\Omega)$ може да се смести како Ω'-подалгебра во полугрупата $M = T/\alpha$.

(*ii*) Ако Λ е фамилијата од сите конгруенции ρ во $A(\Omega)$, такви што соодветните фактор-алгебри $A/\rho(\Omega)$ се Ω'-подалгебри на полугрупи, тогаш β е најмалиот елемент во Λ.

(*iii*) Алгебрата $A(\Omega)$ е Ω'-подалгебра на некоја полугрупа, ако, и само ако, е исполнет следниов услов:

$$a, b \in A \;\&\; a \, \alpha \, b \Rightarrow a = b. \tag{7}$$

Во тој случај, секое идентично равенство што е точно во $T(\Omega')$ е точно и во $A(\Omega)$, т.е. алгебрата $A(\Omega)$ му припаѓа на секое многуобразие на кое му припаѓа и $T(\Omega')$.

Доказ. Овде ќе дадеме опис на конгруенцијата α, не впуштајќи се во целосно докажување на теоремата и тоа од две причини: 1) доказот е скоро идентичен со соодветниот доказ на теоремата 2 од трудот [3], која е специјален случај од оваа теорема; 2) сметаме дека нема да му претставува проблем на читателот сам да го спроведе комплетниот доказ.

Ако $u = c_1 \cdots c_{i-1}\, a c_{i+1} \cdots c_k \in T$, каде што $c_v \in AUD$, $a \in A$, и ако во $A(\Omega)$ е точно равенството $a = \omega\, a_0 \cdots a_n$, тогаш пишуваме:

$$u \vdash c_1 \cdots c_{i-1}\; \omega'\, a_0 \cdots a_n\, c_{i+1} \cdots c_k. \tag{8}$$

Потоа, нека $\vdash\!\dashv$ е рефлексивното и симетрично проширување на $\vdash$, т.е.

$$u \vdash\!\dashv v <=> u = v \vee u \vdash v \vee v \vdash u. \tag{9}$$

Лесно се покажува дека α е транзитивното проширување на $\vdash\!\dashv$, т.е. дека

$$u\, \alpha\, v <=> (\exists\, w_1, \cdots, w_s \in T)\;\, u \vdash\!\dashv w_1 \vdash\!\dashv \cdots \vdash\!\dashv w_s \vdash\!\dashv v. \tag{10}$$

Забелешка. Изнесената теорема би можела да се формулира и во поопшт вид, со тоа што наместо полугрупни полиномни операции од облик (3) би се разгледале операции од облик:

$$\omega'\, x_0\, x_1 \cdots x_n = d_0\, x_{i_0}\, d_1\, x_{i_1} \cdots x_{i_m}\, d_{m+1}, \tag{3'}$$

каде што $v \to i_v$ е сурјекција од $\{0, 1, \cdots, m\}$ во $\{0, 1, \ldots, n\}$. Притоа, не е потребно да се направат никакви измени и во доказот.

2. Теоремата што сега ќе ја докажеме го претставува основниот резултат на овој труд. Да спомнеме прво дека $[\Omega']$, F и T се употребуваат во иста смисла како и во 0.1,. 0.2 односно 1.

ТЕОРЕМА. Нека Ω' е подмножество од F, чии елементи се од облик (3) и нека е исполнет следниов услов:

(I) Ако $z_1, \cdots, z_k \in X\,U\,D$, $\omega' \in \Omega'$, $x_0, \cdots, x_n$, $x \in X$ и ако постои $\xi \in [\Omega']$, таква што

$$z_1 \cdots z_{j-1}\, \omega'\, x_0 \cdots x_n\, z_j \cdots z_k = \xi'\, y_1 \cdots y_{i-1}\, x_0 \cdots x_n\, y_i \cdots y_m, \tag{11}$$

каде што $y_1, \ldots, y_m \in X$, тогаш постои операција $\eta' \in [\Omega']$, таква што

$$z_1 \cdots z_{j-1}\, x z_j \cdots z_k = \eta'\, y_1 \cdots y_{i-1}\, x y_{i+1} \cdots y_m. \tag{12}$$

Алгебрата $A(\Omega)$ е Ω'-подалгебра на полугрупа, ако, и само ако, во $A(\Omega)$ е задоволено секое идентично равенство што важи и во $T(\Omega')$.

Доказ. Точноста на теоремата во една насока следува од третиот дел на претходната теорема.

Нека претпоставиме сега дека Ω' го задоволува условот (I) и дека во $A(\Omega)$ е точно секое идентично равенство што е точно и во $T(\Omega')$. Ако се има предвид тоа што T е слободна полугрупа, заклучуваме дека ако едно равенство

$$\xi' a_0 \cdots a_n = \eta' b_0 \cdots b_m$$

е точно во T, каде што $a_i, b_j \in A$, $\xi', \eta' \in [\Omega']$, тогаш $m = n$, $a_i = b_i$, а освен тоа во секоја полугрупа, па значи и во F, е точно идентичното равенство:

$$\xi' x_0 \cdots x_n = \eta' x_0 \cdots x_n.$$

За да покажеме дека $A(\Omega)$ е Ω'-подалгебра на полугрупа, доволно е да покажеме дека е исполнет условот (7).

Од дефиницијата на $\vdash$, дадена со (8), јасно е дека постои низа $u_1, u_2, \ldots, u_k \in T$, таква што

$$a \vdash u_1,\ u_1 \vdash u_2, \ldots, u_{k-1} \vdash u_k, \tag{13}$$

каде што $a \in A$, ако, и само ако, постои низа $a_0, \ldots, a_n \in A$, и операција $\xi' \in [\Omega']$,, такви што:

$$u_k = \xi' a_0 \cdots a_n \text{ во } T,\ a = \xi a_0 \cdots a_n \text{ во } A(\Omega). \tag{14}$$

(Притоа, биекцијата $\omega \to \omega'$ се проширува, на очигледен начин, до биекција од $[\Omega]$ во $[\Omega']$).

Нека претпоставиме сега дека покрај (13), па значи и (14), имаме и:

$$v = z_1 \cdots z_{j-1}\ b z_j \cdots z_s \vdash u_k = z_1 \cdots z_{j-1}\ \omega' b_0 \cdots b_m z_j \cdots z_s, \tag{15}$$

каде што $z_v \in AUD$, $b = \omega b_0 \cdots b_m$ во $A(\Omega)$.

Имајќи предвид дека е исполнет условот (I), како и споменатиот факт што T е слободна полугрупа, од (14) и (15) следува дека постои операција $\eta' \in [\Omega']$, таква што:

$$v = \eta' c_1 \cdots c_{i-1}\ b\, c_i \cdots c_p, \tag{16}$$

и дека во $T(\Omega')$ е точно равенството:

$$\eta' c_1 \cdots c_{i-1}\ \omega' b_0 \cdots b_m c_i \cdots c_p = \xi' c_1 \cdots c_{i-1}\ b_0 \cdots b_m c_i \cdots c_p = u_k, \tag{17}$$

а

$$a = \xi\, c_1 \cdots c_{i-1}\ b_0 \cdots b_m c_i \cdots c_p, \tag{18}$$

во $A(\Omega)$.

Од (17) и (18) следува:

$$\begin{aligned} a &= \xi\, c_1 \cdots c_{i-1}\, b_0 \cdots b_m\, c_i \cdots c_p \\ &= \eta\, c_1 \cdots c_{i-1}\, \omega\, b_0 \cdots b_m\, c_i \cdots c_p \\ &= \eta\, c_1 \cdots c_{i-1}\, b\, c_i \cdots c_p \end{aligned}$$

од што, според погоре кажаното, следува дека постојат $v_1, v_2, \ldots, v_q \in T$, такви што

$$a \vdash v_1 \vdash v_2 \vdash \cdots \vdash v_q = v. \tag{19}$$

Нека претпоставиме сега дека $a, c \in A$ и дека $a \, \alpha \, c$. Од дефиницијата на α, дадена со (10), и претходната дискусија, следува дека постојат $w_1, w_2, \ldots, w_r \in T$, такви што

$$a \vdash w_1 \vdash w_2 \vdash \cdots \vdash w_r \dashv c,$$

при што постојат $\xi, \eta \in [\Omega]$, такви што

$$\xi' \, b_0 \cdots b_m = w_r = \eta' \, b_0 \cdots b_m \tag{20}$$

и

$$a = \xi\, b_0 \cdots b_m, \; c = \eta\, b_0 \cdots b_m. \tag{21}$$

Од (20) и (21), конечно добиваме $a = c$, со што го комплетиравме доказот на теоремата.

3. Овде ќе покажеме како можат резултатите споменати во уводот да се добијат како последици од теоремата 2.

3.1. Нека во (3) сите константи $d_1, \ldots, d_{n+1}$ го претставуваат празниот симбол, т.е. (3) има облик:

$$d\, x_0\, x_1 \cdots x_n. \tag{3''}$$

Ако Ω' е множеството на полиномни операции од облик (3″), при што за различни елементи ω и τ од Ω и соодветните константи d^ω, d^τ се различни, тогаш е скоро очигледно дека во $T(\Omega)$ не е исполнето ниту едно нетривијално равенство и дека е исполнет условот (I), од теоремата 2. Имајќи го тоа предвид, како последица од оваа теорема го добиваме споменатиот познат резултат дека секоја алгебра $A(\Omega)$ може да се смести во полугрупа S, така што

$$(\forall\, \omega \in \Omega)\ (\forall\, a_0, \ldots, a_n \in A)\ \omega a_0 \cdots a_n = d^\omega\, a_0 \cdots a_n, \tag{22}$$

каде што $\{d^\omega \mid \omega \in \Omega\}$ е фамилија фиксни елементи од S.

3.2. Нека претпоставиме сега дека Ω' е множество на полугрупни полиномни операции од облик:

$$x_0\, d x_1 \cdots x_n, \tag{3'''}$$

при што $n \geqslant 1$. Лесно се покажува дека во алгебрата $F(\Omega')$, па значи и во секоја нејзина хомоморфна слика, се исполнети следниве асоцијативни закони:

$$(\forall\, \omega', \tau' \in \Omega')\ (\forall\, x_0, \ldots, x_{n_\tau + n_\omega}) \tag{23}$$

$$\omega' \tau' x_0 \cdots x_{n_\tau + n_\omega} = \tau' x_0 \cdots x_{n_{\tau'}-1} \omega' x_{n_{\tau'}} \cdots x_{n_{\tau'}+n_{\omega'}}.$$

Секоја алгебра $A(\Omega)$ во која се исполнети овие закони ја викаме делумен асоцијатив.

Нека претпоставиме сега дека $A(\Omega)$ е делумен асоцијатив и нека операција ξ е определена со (2). Ако имаме $i_\nu = i_{\nu+1}$, за некој ν, тогаш можеме да го примениме асоцијативниот закон (23) и по конечно многу такви постапки ќе добиеме нова операција η:

$$\eta\, x_0 \cdots x_n = \tau_0\, x_0 \cdots x_{j_1 - 1}\, \tau_1\, x_{j_1} \cdots \tau_k\, x_{j_k} \cdots x_n, \tag{2'}$$

каде што $0 < j_\nu < j_{\nu+1} \leqslant n_0 + \cdots + n_\nu$, $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k$ е пермутација на $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_k$, а освен тоа точен е идентитетот

$$\xi\, x_0 \cdots x_n = \eta\, x_0\, x_1 \cdots x_n. \tag{24}$$

(Затоа можеме да претпоставиме дека уште во операцијата ξ имавме: $0 \leqslant i_\nu < i_{\nu+1} \leqslant n_0 + \cdots + n_\nu$.)

Нека се задржиме сега на случајот кога Ω' е множество на полугрупни операции од облик (3'''). Ако η' е операција од облик (2'), тогаш ќе имаме:

$$\eta'\, x_0 \cdots x_n = x_0\, d_0\, x_1 \cdots x_{j_1}\, d_1 \cdots x_{j_k}\, d_k \cdots x_n, \tag{2''}$$

каде што d_ν е константата со помош на која е определена операцијата τ_ν'. Имајќи го тоа предвид, заклучуваме дека ако едно равенство е задоволено во полугрупата $T(\Omega')$, тогаш тоа е идентитет и во секој делумен асоцијатив.

Со последователни замени на десната страна од (23) со левата, можеме да уредиме во дадена полиномна операција ξ од облик (2) да биде $0 \leqslant i_\nu \leqslant i_{\nu+1} < n_0 + \cdots + n_\nu$. Имајќи го тоа предвид, лесно се докажува дека е исполнет условот (I) од теоремата 2, од што следува дека секој делумен асоцијатив $A(\Omega)$ може да се смести во полугрупа S, така што:

$$(\forall\, \omega \in \Omega)\ (\forall x_0, \ldots, x_n \in A)\ \omega x_0 \cdots x_n = x_0\, d^\omega\, x_1 \cdots x_n, \tag{24}$$

каде што $\{d^\omega \mid \omega \in \Omega\}$ е фамилија на фиксни елементи од S.

3.3. Нека претпоставиме сега дека сите симболи d_ν, во (3), се празни, т.е. дека (3) има облик:

$$x_0\, x_1 \cdots x_n. \tag{3''''}$$

Јасно е дека две произволни полиномни операции ξ_1', ξ_2' од облик (2), што имаат иста должина n, се еднакви. Секоја алгебра $A(\Omega)$ што ја има таа особина, се вика асоцијатив ([3]). Нека k е најмалиот природен број, таков што во Ω постои операција τ со должина $k+1$, т.е. $k = n_\tau$. Лесно се покажува дека условот (I) е исполнет, ако, и само ако, за секоја операција ω, k е делител на n_ω. Ако тоа не биде исполнето, тогаш постојат асоцијативи што не можат да се сместат во полугрупи, така што операциите на асоцијативите да бидат полиноми од облик $(3'''')$. ([3] пример 2).

3.4. Последната забелешка го сугерира следниов:

ПРОБЛЕМ. Нека Ω' е подмножество од F, чиишто елементи се од облик (3), но притоа не е исполнет условот (I). Нека Σ е класата алгебри $A(\Omega)$ во коишто важат сите идентитети, како и во $T(\Omega')$. Дали постои алгебра, $A(\Omega) \in \Sigma$, којашто не е Ω'-подалгебра на полугрупа?

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. M. Cohn, Universal algebra, New York 1965.

[2] G. Čupona, On some primitive classes of untversal algebras, Matematički vesnik 3(18) 1966, 105—108.

[3]. Ѓ. Чупона, За асоцијативите (во печат).

G. Čupona

SUBALGEBRAS OF SEMIGROUPS

Summary

Let S be a semigroup, D a subset of S, and $\mathbf{D}$ a collection of sequences $\mathbf{d} = d_0, d_1, \ldots, d_n$, where $d_i \in D$ or d_i is an empty symbol. Each element $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ induces an operator ω^d defined by:

$$\omega^d x_0 x_1 \cdots x_n = d_0 x_0 d_1 x_1 \cdots d_n x_n d_{n+1}. \tag{1}$$

Denote by $[\mathbf{D}^*]$ the system of all the operators which can be obtained by successive applications of operators of $\mathbf{D}^* = \{\omega^d | \mathbf{d} \in \mathbf{D}\}$.

Suppose that $A(\Omega)$ is a universal algebra, and $\Theta : \omega \to \Theta\omega$ a bijection from Ω into $\mathbf{D}^*$, such that the arity of ω and $\Theta\omega$ are equal. The mapping Θ can be, in an obvious way, extended to a bijection $\overline{\Theta} : [\Omega] \to [\mathbf{D}^*]$.

The algebra $A(\Omega)$ is said to be a $(\Theta, \mathbf{D})$—subalgebra of a semigroup, if, and only if, there is a semigroup S, such that $AUD \subseteq S$, and

$$(\forall\, \omega \in \Omega)\, (\forall\, a_0, \cdots, a_n \in A)\, \omega\, a_0 \cdots a_n = \omega^d a_0 \cdots a_n, \tag{2}$$

where $\omega^d = \Theta\omega$.

The following results are proved in this paper.

THEOREM. Let T be the semigroup which is freely generated by the set AUD, and let α be the minimal congruence on the semigroup T, such that:

$$\omega\, a_0\, a_1 \cdots a_n = a \text{ in } A(\Omega) \Rightarrow \quad (3)$$
$$\omega^d\, a_0\, a_1 \cdots a_n\, \alpha\, a \text{ in T.}$$

(i) If β is the restriction of α on A, then β is a congruence on $A(\Omega)$, and A/β can be embedded as $(\Theta, \mathbf{D})$ — subalgebra in the semigroup T/α. Moreover, β is the minimal congruence on $A(\Omega)$, such that the corresponding factor algebra is a $(\Theta,\mathbf{D})$-subalgrebra of a semigroup.

(ii) $A(\Omega)$ is a $(\Theta,\mathbf{D})$-subalgebra of a semigroup, if, and only if, the following condition is satisfied:

$$a, b \in A \;\&\; a\,\alpha\, b \Rightarrow a = b. \quad (5)$$

If (5) holds, then the following condition is also satisfied:

(I) Let $\xi, \eta \in [\Omega]$ and $\xi^d, \eta^d \in [\mathbf{D}^*]$, where $\overline{\Theta}\,\xi = \xi^d$, $\overline{\Theta}\,\eta = \eta^d$.

If

$$\xi^d\, x_0\, x_1 \cdots x_m = \eta^d\, x_0\, x_1 \cdots x_m \quad (6)$$

is an identity equation in the algrebra $T(\mathbf{D}^*)$, then

$$\xi\, x_0\, x_1 \cdots x_m = \eta\, x_0\, x_1 \cdots x_m \quad (7)$$

is also an identity equation in the algebra $A(\Omega)$.

(iii) Suppose that the following condition is satisfied in $\mathbf{T}$:

(II) If $c_1, \cdots c_k \in AUD, a, a_0, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m \in A, \omega^d \in \mathbf{D}^*, \xi^d \in [\mathbf{D}^*]$, and if

$$c_1 \cdots c_{j-1}\, \omega^d\, a_0 \cdots a_n\, c_j \cdots c_k = \xi^d\, b_1 \cdots b_{i-1}\, a_0 \cdots a_n\, b_i \cdots b_m, \quad (8)$$

then there is an $\eta^d \in [\mathbf{D}^*]$, such that:

$$c_1 \cdots c_{j-1}\, a c_j \cdots c_k = \eta^d\, b_1 \cdots b_{i-1}\, a b_i \cdots b_m. \quad (9)$$

Then, an algebra $A(\Omega)$ is a $(\Theta, \mathbf{D})$-subalgebra of a semigroup, if, and only if, the condition (I) is satisfied.