ЗА ЕДНА КЛАСА ПОЛУГРУПИ

Б. Л. Трӣеновски

1. Нека S е полугрупа. За потполугрупа B од S велиме дека е би-идеал во S ако $BSB \subseteq B$. Полугрупата S ја викаме β-полугрупа ако секоја нејзина потполугрупа е би-идеал. Во овој труд се изнесуваат неколку особини на β-полугрупите, додека прашањето за нивниот структурен опис, како што е тоа, на пример, сторено во [2] за λ- (ρ-) полугрупите, останува отворено. Притоа, λ-полугрупа се вика секоја полугрупа S чија секоја потполугрупа е лев идеал во S (дуално за ρ-полугрупите).

Класата β-полугрупи претставува обопштение на секоја од класите λ- (ρ-) полугрупи. Навистина, ако, на пример, S е λ-полугрупа и ако B е потполугрупа од S, тогаш $BSB \subseteq BB \subseteq B$, па S е β-полугрупа. Обратно, дека не секоја β-полугрупа мора да биде и λ-полугрупа се гледа од следниот

Пример: Нека $S = \{e, a, b, c, d, u, v\}$ е групоидот определен со приложената таблица. Со проверка лесно се уверуваме дека S е полугрупа. Притоа, поради $b = a^2$, $c = a^3$, $e = a^4$, добиваме дека $[a] = \{a, b, c, e\}$ е циклична потполугрупа од S, во која e е идемпотент. Бидејќи редот на оваа потполугрупа е 4, S не е λ-полугрупа ([2], лема 3). Сите потполугрупи од S се: $\{e\}$; $\{e, d\}$; $\{e, u\}$; $\{e, v\}$; $\{e, d, u\}$; $\{e, d, v\}$; $\{e, u, v\}$; $\{e, d, u, v\}$; $\{e, a, b, c\}$; $\{e, a, b, c, u\}$; $\{e, a, b, c, v\}$; $\{e, a, b, c, u, v\}$; S. Ако B е било која од првите 8 потполугрупи од S, лесно се проверува дека $BSB = \{e\} \subseteq B$, додека, ако со C е означена било која од останатите потполугрупи, се добива дека $CSC = \{e, b, c\} \subseteq C$. Тоа покажува дека S е β-полугрупа.

	e	a	b	c	d	u	v
e	e	e	e	e	e	e	e
a	e	b	c	e	u	e	b
b	e	c	e	e	e	e	c
c	e	e	e	e	e	e	e
d	e	e	v	e	e	e	e
u	e	b	c	e	e	e	e
v	e	e	e	e	e	e	e

Точна е, меѓутоа, следната

Лема 1. Ако β-полугрупата S нема прави десни (леви) идеали, тогаш таа ќе биде λ-полугрупа (ρ-полугрупа).

Доказ. Да забележиме дека левиот (десниот) идеал C од S го викаме прав, ако $C \neq S$. Нека B е потполугрупа од S и нека за S претпоставиме дека нема прави десни идеали. Бидејќи, по претпоставката, B е би-идеал во S, за $R = B \cup BS$ добиваме дека е десен идеал во S: $RS = (B \cup BS)S = BS \cup BSS \subseteq BS \cup BS = BS \subseteq B \cup BS = R$. Според условите на лемата, $R=S$, а тогаш: $SB = (B \cup BS)B = BB \cup BSB \subseteq B \cup B = B$. Така, B е лев идеал во S, т. е. S е λ-полугрупа. Другиот дел од лемата се докажува дуално.

2. Ќе изнесеме неколку особини на β-полугрупите, завршувајќи со една теорема за декомпозиција на β-полугрупите во унипотентни β-полугрупи. Притоа, резултатите и нивните докази се добиени со соодветна модификација на резултатите од точката 2 од трудот [2].

Лема 2. Секоја потполугрупа и секоја хомоморфна слика од една β-полугрупа е β-полугрупа.

Лема 3. Полугрупата S е β-полугрупа ако, и само ако, за секој $a \in S$ е $aSa \subseteq [a]$.

Доказ. Пред да го изнесеме доказот, да забележиме дека со $[a]$, како и во горниот пример, е означена цикличната потполугрупа од S генерирана од a ([1], Теорема 1.9). Нека претпоставиме дека S е β-полугрупа. Тогаш, $aSa \subseteq [a]\, S\, [a] \subseteq [a]$. Обратно, нека B е потполугрупа од S; тогаш од $aSa \subseteq [a]$, поради $[a] \subseteq B$, добиваме дека $aSa \subseteq B$ за секој $a \in B$, па значи и $BSB \subseteq B$, што покажува дека S е β-полугрупа.

Лема 4. Нека S е β-полугрупа и нека $E = \{e \mid ee = e,\ e \in S\}$. Тогаш: $(i)\, E \neq \emptyset$, $(ii)\, E$ е антикомутативна полугрупа од идемпотенти, така што за секој $x \in S$ е $exe = e$, (iii) ако $xyx = x$ за некои $x, y \in S$, тогаш $x \in E$.

Доказ. (i) Нека $a \in S$. Да претпоставиме дека $[a]$ е бескрајна потполугрупа од S. Тогаш $B = \{a^{2k} \mid k\text{-природен број}\}$ е потполугрупа од $[a]$, па според лемата 2 имаме дека $B\,[a]\,B \subseteq B$. Тогаш пак $a^5 = a^2\, a a^2 \in B\,[a]\,B \subseteq B$. Добиената противуречност покажува дека $[a]$ е конечна потполугрупа од S. Според теоремата 1.9 од [1], единицата на подгрупата K_a од $[a]$ е идемпотент, па $E \neq \emptyset$.
(ii) Нека $e \in E$ и $x \in S$. Според лемата 3 имаме дека $eSe \subseteq [e] = \{e\}$, додека пак, од друга страна, е $\{e\} = \{eee\} \subseteq eSe$; така $eSe = \{e\}$ и значи $exe = e$. Од $e, e' \in E$ и понапред докажаното, се добива дека $(ee')^2 = ee'ee' = ee'$, па E е потполугрупа од S, којашто, поради $ee'e = e$, е антикомутативна. (За антикомутативните полугрупи може да се види, на пример, [1], § 1.8, или [3], стр. 108—110, 295—297).
(iii) Нека сега $xyx = x$, $x, y \in S$, и нека ставиме $C = \{c \mid xc = x\}$. Од $xyx = x$ следува дека $yx \in C$, т. е. $C \neq \emptyset$. Ако $c_1, c_2 \in C$, тогаш $x(c_1 c_2) = (xc_1)c_2 = xc_2 = x$, па C е потполугрупа од S. Тогаш од $CSC \subseteq C$ следува дека $yx \cdot x \cdot yx \in C$, па $x(yx \cdot x \cdot yx) = x$, т. е. $xx = xyx \cdot xyx = x$ и $x \in E$.

Лема 5. Ако S е β-полугрупа, тогаш за секој $a \in S$, $|[a]| \leqslant 5$ (со $|[a]|$ е означен редот на $[a]$).

Доказ. Според доказот на претходната лема, $[a]$ е конечна потполугрупа од S. Нека e е единицата во K_a и нека p е најмалиот природен број, таков што $a^p = e$. Ако $x \in K$, тогаш $exe = xe = x$, додека пак, според (ii) од претходната лема, имаме дека $exe = e$; така, $K_a = \{e\}$. Ако сега $p > 5$, добиваме дека $B = \{a^2, a^4, a^6, \ldots, a^p = e\}$ е потполугрупа од $[a]$, за која, според лемата 2 е $B[a]B \subseteq B$. Но, сега ја добиваме противречноста $a^5 = a^2 a a^2 \in B$. Мора значи $p \leqslant 5$.

Лема 6. Нека e е идемпотент во β-полугрупата S и нека $S(e) = \{x \mid x^p = e,\ x \in S\}$. Тогаш $S(e)$ е најголема унипотентна потполугрупа (според тоа и би-идеал) од S што го содржи идемпотентот e, кој всушност е нула во $S(e)$.

Доказ. Да забележиме прво дека од доказот на лемата 5 и теоремата 1.9 од [1] следува дека за секој $x \in S(e)$, $ex = xe = e$. Да покажеме дека $S(e)$ е потполугрупа од S. Нека $x, y \in S(e)$, т. е. $x^p = y^q = e$, $1 \leqslant p, q \leqslant 5$, и нека $xy = z$. Тогаш $zx = xyx \in xSx \subseteq [x]$. Ако $zx = e$, добиваме дека $z^2 = zxy = ey = e$, и значи $z \in S(e)$. Нека $zx = x^k$, $1 \leqslant k < p$. Сега $z^2 = zxy = x^k y$, па $z^2 x^{p-k} z^2 = x^k y x^p y = x^k yey = e$, додека пак, од друга страна, добиваме дека $z^2 x^{p-k} z^2 \in [z]$, т. е. $z^2 x^{p-k} z^2 = z^{2s} = e$ и $z \in S(e)$. Ако x е идемпотент во $S(e)$, добиваме дека $x = xx = \ldots = x^p = e$, па значи $S(e)$ е унипотентна потполугрупа од S. Нека R е потполугрупа од S која што го содржи идемпотентот e, и нека $y \in R$. Бидејќи $[y] \subseteq R$ и, според лемата 4, бидејќи $[y]$ содржи идемпотент, од унипотентноста на R следува дека тој идемпотент е e, па $y^r = e$, т, е. $y \in S(e)$. Лемата е докажана.

Нека $S(e)$ и $S(e')$ се две унипотенти потполугуупи од S определени како и во лемата 6. Ако $x \in S(e) \cap S(e')$, т. е. $x^p = e$ и $x^q = e'$, добиваме дека $e = e'$. Навистина, ако $p = q$, претходното равенство е очигледно, а ако, на пример, $p < q$, тогаш $e' = x^q = x^p x^{q-p} = ex^{q-p} = e$, според претходната лема. Со тоа, земајќи ги предвид и напред изнесените резултати, докажана е следната

Теорема. Секоја β полугрупа S е дисјунктна унија од една фамилија $\{S(e) \mid e \in E\}$ би-идеали од S, така што: (i) E е антикомутативна потполугрупа од S што се состои од сите идемпотенти од S; (ii) секоја од потполугрупите $S(e)$ е најголема унипотентна потполугрупа од S во секоја од кои идемпотентот е нула.

Со изнесената теорема е овозможено изучувањето на β-полугрупите да се спроведе преку унипотентите β-полугрупи. Описот на структурата на унипотентите β-полугрупи, по наше мнение, би преставувал интересна задача. Меѓутоа, сакаме да забележиме дека решението на оваа задача би било прилично потешко отколку соодветните решенија за полугрупите разгледани во [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Clifford A. H. and Preston G. B., The algebraic theory of semigroups, v, 1, 1961, Providence.

[2] Kimura Naoki, Tamura Takayuki and Merkel Rudolph, Semigroups in which all subsemigroups are left ideals, Can. J. Math., XVII (1965), 52—62.

[3] Ляпин Е. С., Полугруппы, 1960, Москва.

B. L. Trpenovski

ON A CLASS OF SEMIGROUPS

Summary

A Subsemigroup B of a semigroup S is said to be a bi-ideal of S if $BSB \subseteq B$ ([1], p. 84). A β-semigroup is a semigroup S in which every subsemigroup B is a bi-ideal. Every λ- (ρ)- semigroup is also a β-semigroup. If a β-semigroup S does not contain right (left) ideals different from S, then it is a λ- (ρ-) semigroup. If S is a β-semigroup, then the following assertions are true:

(i) S contains at least one idempotent. The set E of all the idempotents in S is an anticommutative subsemigroup of S such that exe=e for every $e \in E$, $x \in S$.

(ii) If xyx$=x$ for some $y \in S$, then $x \in E$.

(iii) $|< a >| \leqslant 5$, for every $a \in S$.

(iv) $S = \bigcup_{e \in E} S(e)$, where the union is disjoint, E is the subsemigroup of S defined in (i), and $S(e) = \{x \in S \mid x^p = e\}$. $S(e)$ is the greatest unipotent subsemigroup of S containing the idempotent e.