АНТИКОМУТАТИВНИ n-ГРУПОИДИ

Бранко Л. Трпеновски

1. Нека е S непразно множенство. Секое присликување „$*$“ од S^{n+1} во S го викаме $(n+1)$ – тарна операција во S, додека за самото множество S тогаш велиме дека е n-групоид по однос на операцијата „$*$“; овој n-групоид го означуваме со $S(*)$, а ако у е сликата од $(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in S^{n+1}$ при пресликувањето „$*$“, пушуваме $y = * x_0 x_1 \cdots x_n$. За n-групоидот $S(*)$ велиме дека е антикомутативен ако постојат такви $a_j \in S, j = 1, 2, \cdots, n-1$, да

$$(1) \qquad * x a_1 \cdots a_{n-1} y = * y a_1 \cdots a_{n-1} x \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Ако пак за секои $x_j \in S,\ j = 0, 1, 2, \cdots, 2n$,

$$(2) \qquad * (* x_0 \cdots x_n) x_{n+1} \cdots x_{2n} = * x_0 \cdots x_{n-1} (* x_n \cdots x_{2n}),$$

за n-групоидот $S(*)$ велиме дека е $(0, n)$ – асоцијативен.

Во овој труд се докажува следната

Т е о р е м а. За секој антикомутативен $(0, n)$ – асоцијативен n-групоид $S(*)$ постои антикомутативна полугрупа $S(\cdot)$ таква да за секои $x, y, s_j \in S,\ j = 1, 2, \cdots, n-1$,

$$(3) \qquad * x s_1 \cdots s_{n-1} y = x \cdot y.$$

Опис на структурата на антикомутативните полугрупи може да се најде на пример во [1]; притоа, за полугрупата $S(\cdot)$ се вели дека е антикомутативна ако $x \cdot y = y \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = y$. Имено, се покажува дека ако A и B се две непразни множества и ако на $H = A \times B$ се определи операција „o“ со $(x_1, y_1)\, o\, (x_2, y_2) = (x_1, y_2)$, ќе се добие дека $H(o)$ е антикомутативна полугрупа, а и обратно, секоја антикомутативна полугрупа е изоморфна со некоја полугрупа од опишаниот тип ([1], стр. 108 – 110, 295 – 297).

Доказ за нашата теорема се добива од следните разгледувања, при кои насекаде се претпоставува дека $S(*)$ е антикомутативен $(0, n)$ – асоцијативен n-групоид без тоа посебно да се нагласува.

2. Нека покажеме дека за секои $s_j \in S,\ j = 1, 2, \cdots, n-1$,

$$(4) \qquad * x s_1 \cdots s_{n-1} y = * y s_1 \cdots s_{n-1} x \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Најнапред, од

$$*(* x a_1 \cdots a_{n-1} x) a_1 \cdots a_{n-1} x = * x a_1 \cdots a_{n-1} (* x a_1 \cdots a_{n-1} x)$$

следува дека за секој $x \in S$,

(5) $$* x a_1 \cdots a_{n-1} x = x.$$

Нека $* x s_1 \cdots s_{n-1} y = * y s_1 \cdots s_{n-1} x = z$. Тогаш,

$$* z a_1 \cdots a_{n-1} x = *(* y s_1 \cdots s_{n-1} x) a_1 \cdots a_{n-1} x =$$

$$= * y s_1 \cdots s_{n-1} (* x a_1 \cdots a_{n-1} x) = * y s_1 \cdots s_{n-1} x = z,$$

и слично, $* x a_1 \cdots a_{n-1} z = z$. Така, $* z a_1 \cdots a_{n-1} x = * x a_1 \cdots a_{n-1} z$, од каде што се добива дека $z = x$. На ист начин може да се добие дека $z = y$, што заедно со претходното дава $x = y$.

Од горниот доказ и од доказот на (5) следува дека за секои $s_j \in S$, $j = 1, 2, \cdots, n-1$ и секој $x \in S$,

(6) $$* x s_1 \cdots s_{n-1} x = x.$$

3. Нека сега $s_j, s_j' \in S, j = 1, 2, \cdots, n-1$ се произволно избрани елементи и нека ставиме

(7) $$* x s_1 \cdots s_{n-1} y = u, \quad * x s_1' \cdots s'_{n-1} y = v.$$

Тогш добиваме

$$* x s_1 \cdots s_{n-1} u = * x s_1 \cdots s_{n-1} (* x s_1 \cdots s_{n-1} y) =$$

$$= *(* x s_1 \cdots s_{n-1} x) s_1 \cdots s_{n-1} y = u,$$

како и,

$$*(* u s_1 \cdots s_{n-1} x) s_1 \cdots s_{n-1} x = * u s_1 \cdots s_{n-1} (* x s_1 \cdots s_{n-1} x) =$$

$$= * u s_1 \cdots s_{n-1} x =$$

$$= *(* x s_1 \cdots s_{n-1} u) s_1 \cdots s_{n-1} x = * x s_1 \cdots s_{n-1} (* u s_1 \cdots s_{n-1} x),$$

од каде што следува

(8) $$* u s_1 \cdots s_{n-1} x = x.$$

Со помош на (8) сега добиваме дека

$$v = * x s_1' \cdots s'_{n-1} y = *(* u s_1 \cdots s_{n-1} x) s_1' \cdots s'_{n-1} y =$$

$$= * u s_1 \cdots s_{n-1} (* x s_1' \cdots s'_{n-1} y) = * u s_1 \cdots s_{n-1} v,$$

(9) $$* u s_1 \cdots s_{n-1} v = v.$$

Од друга страна, слично како и погоре, може да се добие по ред: $* v s_1 \cdots s_{n-1} y = v$ и $* y s_1 \cdots s_{n-1} v = y$, а со помош на последното од овие две равенства се добива

$$* u s_1 \cdots s_{n-1} v = * (* x s_1 \cdots s_{n-1} y) s_1 \cdots s_{n-1} v =$$

$$= * x s_1 \cdots s_{n-1} (* y s_1 \cdots s_{n-1} v) = * x s_1 \cdots s_{n-1} y = u,$$

што заедно со (9) дава $u = v$.

Со тоа е покажано дека елементот $* x s_1 \cdots s_{n-1} y$ не зависи од елементите s_j, туку само од x и y. Според тоа, ако ставиме

(10) $$* x s_1 \cdots s_{n-1} y = x \cdot y,$$

ќе добиеме дека „·" е добро дефинирана операција на S. Лесно се проверува дека $S(\cdot)$ е антикомутативно полугрупа. Со тоа доказот на теоремата е завршен.

ЛИТЕРАТУРА

[1], *Ляпин, Е. С.*, Полугруппы, Москва 1960.

Branko L. Trpenovski

ON ANTICOMMUTATIVE n-GROUPOIDS

Summary

An n-groupoid $S(*)$ is a nonempty set S with an $(n+1)$-ary operation „$*$" defined on it. The n-groupoid $S(*)$ is said to be anticommutative if for some $a_j \in S$, $j = 1, \cdots, n-1$, $* x a_1 \cdots a_{n-1} y = * y a_1 \cdots a_{n-1} x \Rightarrow x = y$. $S(*)$ is a $(0, n)$-associative n-groupoid if for every $x_j \in S$, $j = 0, 1, \cdots, 2n$,

$$* (* x_0 \cdots x_n) x_{n+1} \cdots x_{2n} = * x_0 \cdots x_{n-1} (* x_n \cdots x_{2n}).$$

In this note the following theorem is proved:

Theorem. For every anticommutative $(0, n)$-associative n-groupoid $S(*)$ there exists an anticommutative semigroup $S(\cdot)$ such that for every $x, y, s_j \in S$, $j = 1, \cdots, n-1$,

$$* x s_1 \cdots s_{n-1} y = x \cdot y.$$

A semigroup S is anticommutative if $x y = y x \Rightarrow x = y$. It is proved (see for example [1], pp. 108–110, 295–297) that every anticommutative semigroup is isomorphic to a semigroup $H(\circ)$ where $H = A \times B$, A, B -nonempty sets and $(x_1, y_1) \circ (x_2, x_2) = (x_1, y_2)$.