ПОЛУГРУПИ ГЕНЕРИРАНИ ОД АСОЦИЈАТИВИ

Ѓ. Чупона

(Примено на 8. III. 1966 г.)

Увод. Познато е дека секој асоцијатив (т. е. алгебарска структура со една финитарна асоцијативна операција) може да се покрие со полугрупа ([7] Теорема 2). При тоа на особините од асоцијативот им кореспондираат соодветни особини на неговите покривачи. Проучувањето на таа кореспонденција е основна задача на оваа работа.

Во првиот дел се изнесуваат нужните дефиниции и формулираат неколку резултати од работата [7]. Во **2.** се покажува дека секој комутативен асоцијатив може да се покрие со комутативна полугрупа, а исто така се дава и опис на асоцијативите за кои сите покривачи се комутативни. Во **3.** се изучуваат асоцијативите кои имаат соодветни особини за кратливост. Се дава пример на кратлив асоцијатив за кој ниеден покривач не е кратлив, а потоа се опишуваат асоцијативите за кои некои покривачи се кратливи. Во **4**. се испитува фамилијата покривачи на една $n-$група. Како едно следствие на резултатите од овој дел, се добива прьмер на асоцијатив со неизоморфни минимални покривачи, а со тоа е решен еден проблем поставен во работата [7]. Во **5**. се изучуваат лево простите асоцијативи, т. е. асоцијативите чии покривачи се лево прости полугрупи. Овде се добива и една карактеристика на асоцијативите што се директен производ на $n-$група и лево нулти асоцијатив. На крајот, во шестиот дел, се споменуваат неколку проблеми.

1. **Претходни дефиниции и резултати.** Нека $*$ е $(n+1)-$арна операција во непразното множество Q. Структурата $Q(*)$ ќе ја наречеме $n-$оператив. Резултатот од применувањето на операцијата ќе го означиме со $* x_0 x_1 \cdots x_n$, а во случај операцијата да е бинарна (т. е. за $n=1$) ќе ја употребуваме и вообичаената ознака $x * y$ или само $x y$. Со помош на операцијата $*$ може да се определи и операцијата $* i_1 i_2 \cdots i_{k-1}$ на следниот начин

$$(1.\ 1) \qquad * i_1 \cdots i_{k-1} x_0 \cdots x_{kn} = * x_0 \cdots * x_{i_1} \cdots * x_{i_2} \cdots * x_{i_{k-1}} \cdots x_{kn},$$

а при тоа целите броеви i_ν го задоволуваат условот $0 \leq i_{\nu\ 1} \leq i_\nu \leq \nu n$. Во специјален случај кога $i_1 = i_2 = \cdots = i_{k-1} = 0$, пишуваме $*^k$ наместо $* i_1 i_2 \cdots i_{k-1}$; исто така, $*^0$ се определува со $*^0 x = x$. За $n-$оперативот $Q(*)$ велиме дека е $(i, j)-$асоцијативен ако равенството

$$(1.\ 2) \qquad * i\, x_0 \cdots x_{2n} = * j\, x_0 \cdots x_{2n}$$

е идентично точно во Q. Ако n—оперативот $Q(*)$ е (i, j)—асоцијативен за секој пар $i, j \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, тогаш велиме дека тој е n—асоцијатив. Со индукција, лесно се покажува дека ако $Q(*)$ е n—асоцијатив, тогаш $Q(*^k)$ е kn—асоцијатив, и дека $*^k = * i_1 i_2 \cdots i_{k-1}$, за произволна низа цели броеви $i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}$ што го задоволуваат гореспоменатиот услов. n—асоцијативот $Q(*)$ велиме дека е n—подасоцијатив од полугрупата $S(\cdot)$ ако $Q \subseteq S$ и ако $* x_0 x_1 \cdots x_n = x_0 x_1 \cdots x_n$ за секои $x_\nu \in Q$. Ако освен тоа, Q е генераторно множество за полугрупата S, велиме дека S е покривач на $Q(*)$; секоја полугрупа изоморфна со S исто така ја сметаме за покривач на $Q(*)$.

За натаму, ако не биде потребно специјално да се спомене бројот n ќе велиме само оператив, или асоцијатив, наместо n—оператив или n—асоцијатив, соодветно. Да напоменеме дека за истите поими во работата [7] се употребуваат термините n—групоид, т. е. n—полугрупа. Термините оператив и асоцијатив се употребени од Г л у с к и н во работата [1] и сметаме дека тие се посоодветни.

Нека S_1 и S_2 се два покривачи на асоцијативот Q. Јасно е дека постои најмногу еден хомоморфизам од S_1 на S_2 кој на Q го индуцира идентичното пресликување; секој таков хомоморфизам ќе велиме дека е Q-хомоморфизам. Нека Σ е класа од покривачи на еден асоцијатив Q. Ако $P \in \Sigma$ и ако P може Q—хомоморфно да се преслика на секој член од Σ, ќе велиме дека P е максимален покривач од Q во Σ. Покривачот T велиме дека е минимален во Σ ако секој Q—хомоморфизам од T на некој друг член од Σ е изоморфизам. Јасно е дека максималниот покривач (ако постои) е еднозначно определен до изоморфизам, но истото не важи и за минималните покривачи (да се види примерот 4. 1).

Секоја од наредните две теореми претставува по еден дел на основниот резултат од работата [7].

Т е о р е м а 1. 1. Класата покривачи од еден асоцијатив не е празна и во неа постојат максимални и минимални членови. Нека M е максималниот покривач на асоцијативот Q и нека $\Omega = \{\alpha\}$ е фамилијата од сите конгруенции α на полугрупата M, такви да $x, y \in Q \,\&\, x \alpha y \Rightarrow x = y$. Полугрупата S е покривач на Q ако и само ако е изоморфна со некоја полугрупа од облик M/α, каде $\alpha \in \Omega$. Секоја конгруенција $\alpha \in \Omega$ се содржи во некоја максимална конгруенција $\beta \in \Omega$, а во тој случај M/β е минимален покривач на Q.

Т е о р е м а 1. 2. Нека $Q(*)$ е n—асоцијатив и нека $(x_1, \ldots, x_k)$, $(y_1, \cdots, y_k)$ се две k—орки елементи од Q, каде $k \leq n$. Ако постојат елементи $a_1, a_2, \cdots, a_t \in Q$ и броеви r_i, s_i, такви да

$$(1.\ 3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= *^{r_1} a_1 \cdots a_{r_1 n+1},\ x_2 = *^{r_2} \cdots a_{(r_1+r_2)n+2}, \cdots, x_k = *^{r_k} \cdots a_t \\ y_1 &= *^{s_1} a_1 \cdots a_{s_1 n+1},\ y_2 = *^{s_2} \cdots a_{(s_1+s_2)n+2}, \cdots, y_k = *^{s_k} \cdots a_t \end{aligned}$$

каде $t - k = (r_1 + r_2 + \cdots + r_k)\, n = (s_1 + s_2 + \cdots + s_k)\, n$, тогаш пишуваме $(x_1, \cdots, x_k)$ $\varphi_0\, (y_1, \cdots, y_k)$. Потоа, нека φ е транзитивното проширување од φ_0, т. е. $\mathbf{x}\, \varphi\, \mathbf{y} \iff \mathbf{x}\, \varphi_0\, \mathbf{u}\, \varphi_0\, \mathbf{z}\, \varphi_0 \cdots \varphi_0\, \mathbf{w}\, \varphi_0\, \mathbf{y}$ за некои k—орки $\mathbf{u}, \mathbf{z}, \cdots, \mathbf{w}$.

Нека M е максималниот покривач на Q и нека $x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_p \in Q$ каде $p, k \leq n$. Тогаш равенството $x_1 x_2 \cdots x_k = y_1 y_2 \cdots y_p$ е точно во M ако и само ако $(x_1, x_2, \cdots, x_k) \varphi (y_1, y_2, \cdots, y_k)$ и $k = p$.

2. Комутативни асоцијативи. Поимот за комутативност во класата асоцијативи се воведува на сличен начин како и кај полугрупите. Имено n—асоцијативот $Q(*)$ велиме дека е комутативен ако равенството

$$*\, x_0 x_1 \cdots x_n = *\, x_{0\xi} x_{1\xi} \cdots x_{n\xi} \tag{2. 1}$$

е идентично точно во Q за секоја пермутација ξ на множеството $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$. Јасно е дека ако некој покривач на еден асоцијатив е комутативен, тогаш и самиот асоцијатив е комутативен. Од наредниот пример се гледа дека еден комутативен асоцијатив може да има и некомутативни покривачи.

Пример 2. 1. Ако во множеството на непарните природни броеви различни од еден ставиме $\square xyz = x + y + z$ добиваме тернарен комутативен асоцијатив. При тоа, за било кои a_ν, b_λ, имаме $3 \neq \square a_1 a_2 a_3$ и $5 \neq \square b_1 b_2 b_3$, од што — спрема теоремата 1. 2 — следува дека во максималниот покривач $M(\bullet)$ на $Q(\square)$ имаме $3 \bullet 5 \neq 5 \bullet 3$, т. е. дека $M(\bullet)$ не е комутативна полугрупа. Адитивната полугрупа на множеството $H = \{3, 5, 6, 7, \cdots, n, n+1, \cdots\}$ е комутативен покривач на дадениот тернарен асоцијатив.

Теорема 2. 1. Нека M е максималниот покривач на комутативниот асоцијатив $Q(*)$ и нека ψ е минималната комутативната конгруенција во M. Фактор-полугрупата M/ψ е максимален комутативен покривач на Q. Секој комутативен покривач на Q може Q—хомоморфно да се пресlика на некој минимален комутативен покривач од Q.

Доказ. Ако x и y се елементи од M и ако постои низа елементи $u_1, u_2, \cdots, u_k$ од M и пермутација ξ на $\{1, 2, \cdots, k\}$ такви да

$$x = u_1 u_2 \cdots u_k, \quad y = u_{1\xi} u_{2\xi} \cdots u_{k\xi}, \tag{2. 2}$$

тогаш ќе пишуваме $x \psi_0 y$. Потоа, нека ψ е транзитивното проширување на ψ_0, т. е. $x \psi y \Longleftrightarrow x \psi_0 u \psi_0 v \psi_0 \cdots \psi_0 z \psi_0 y$ за некои $u, v, \cdots, z \in M$. Јасно е дека ψ е конгруенција во M и дека фактор-полугрупата M/ψ е комутативна; затоа се вели дека ψ е комутативна конгруенција во M. Освен тоа, јасно е и дека ако ρ е комутативна конгруенција во M (т. е. ако полугрупата M/ρ е комутативна), тогаш имаме $\psi \leq \rho$. Значи, ψ е минималната комутативна конгруенција во M. Ќе покажеме сега дека $x, y \in Q \,\&\, x \psi y \Longrightarrow x = y$, од што ќе следува (спрема теоремата 1. 1) дека M/ψ е комутативен покривач на Q.

Нека $x \in Q$ и нека $x \psi_0 y$. Тогаш имаме $x = u_1 u_2 \cdots u_k$, $y = u_{1\xi} u_{2\xi} \cdots u_{k\xi}$ за некои u_ν и пермутација ξ. Имајќи во вид дека Q е генераторно множество за полугрупата M, секој фактор u_ν можеме да го претставиме како производ на елементи од Q, така да можеме да напишеме $x = a_0 a_1 \cdots a_m$ $y = a_{0\eta} a_{1\eta} \cdots a_{m\eta}$ каде $a_\lambda \in Q$, а η е пермутацијата добиена од ξ и претставувањето на u_ν во производ $a_r a_{r+1} \cdots a_{r+s}$. Поради $x \in Q$ — ако се има предвид теоремата 1. 2 — бројот m мора да биде од облик pn, а од тоа следува дека

$$x = *^p a_0 a_1 \cdots a_{pn}, \; y = *^p a_{0\eta} a_{1\eta} \cdots a_{(pn)\eta}.$$

Од комутативноста на асоцијативот $Q(*)$ следува дека е комутативен и асоцијативот $Q(*^p)$, па значи имаме

$$x = *^p a_0 a_1 \cdots a_{pn} = *^p a_{0\eta} a_{1\eta} \cdots a_{(np)\eta} = y.$$

Со тоа покажавме дека $x \in Q \,\&\, x\psi_0 y \Longrightarrow x = y$, од што е јасно и тоа дека $x, y \in Q \,\&\, x\psi y \Longrightarrow x = y$. Така добиваме дека M/ψ е навистина покривач на Q.

Нека претпоставиме сега дека S е произволен комутативен покривач на Q. Спрема теоремата 1. 1, постои конгруенција $\alpha \in \Omega$ на полугрупата M таква да $S \cong M/\alpha$. Поради комутативноста на S имаме $\psi \leq \alpha$ од што следува дека постои Q—хомоморфизам од M/ψ на M/α. Спрема тоа, добивме дека навистина M/ψ е максимален комутативен покривач за Q. Спрема теоремата 1. 1. постои максимален член $\beta \in \Omega$ таков да $\alpha \leq \beta$, а поради комутативноста на α, тогаш добиваме дека и β е комутативна конгруенција, од што следува дека M/β е минимален комутативен покривач и при тоа постои Q—хомоморфизам од M/α на M/β.

Со тоа доказот на теоремата е комплетиран.

Пример 2. 2. Множеството од сите непарни природни броеви е тернарен комутативен асоцијатив во однос на операцијата собирање. Секој покривач на тој асоцијатив е изоморфен со адитивната полугрупа на природните броеви, па спрема тоа секој таков покривач е комутативен.

Теорема 2. 2. Нека $Q(*)$ е комутативен n—асоцијатив. Секој покривач на Q е комутативен ако и само ако во множеството $R = Q \setminus *\, Q^{n+1}$ нема повеќе од еден елемент. (При тоа множеството $*\, Q^{n+1}$ е определено со $*\, Q^{n+1} = \{* x_0 x_1 \cdots x_n;\ x_0, x_1, \cdots, x_n \in Q\}$).

Доказ. Нека a и b се два различни елементи од множеството $Q \setminus *\, Q^{n+1}$. Тогаш јасно е дека $(a, b)\, \varphi_0\, (x, y) \Longrightarrow a = x,\ b = y$, па значи ќе имаме и $(a, b)\, \varphi\, (u, v) \Longrightarrow a = u,\ b = v$; при тоа φ_0 и φ се определени како и во теоремата 1. 2. Од тоа следува дека во максималниот покривач M од Q ќе биде точно неравенство $ab \neq ba$, т. е. добиваме дека тој покривач не е комутативен. Да претпоставиме сега дека во множеството $Q \setminus *\, Q^{n+1}$ нема повеќе од еден елемент, и нека S е покривач на Q. Ако x и y се два различни елементи од Q, спрема направената претпоставка, барем еден од нив е во $*\, Q^{n+1}$, и нека тоа е y; постојат значи елементи $y_0, y_1, \cdots, y_n \in Q$ такви да $y = * y_0 y_1 \cdots y_n$. Од тоа — поради комутативноста на асоцијативот Q—следува дека во S е точно следното

$$\begin{aligned} xy &= x(y_0 y_1 \cdots y_n) \\ &= (x y_0 \cdots y_{n-1})\, y_n \\ &= (y_0 \cdots y_{n-1} x)\, y_n \\ &= y_0 (y_1 \cdots y_{n-1}\, x\, y_n) \\ &= y_0 (y_1 \cdots y_{n-1}\, y_n\, x) \\ &= (y_0 y_1 \cdots y_n)\, x \\ &= yx. \end{aligned}$$

Имаме значи, $xy=yx$ за секој пар $x, y \in Q$, од што следува дека S е комутативна полугрупа, бидејќи множеството Q е генераторно за S.

Со тоа теоремата е докажана.

3. Кратливи асоцијативи. За n—асоцијативот $Q(*)$ велиме дека е i—кратлив ако е исполнет следниот услов:

$$(3.\ 1) \qquad * a_1 \cdots a_{i-1}\, x\, a_i \cdots a_n = * a_1 \cdots a_{i-1}\, y\, a_i \cdots a_n \Rightarrow x=y;$$

за $i=n+1$ имаме лева, а за $i=1$ десна кратливост. Еден асоцијатив е кратлив ако е i—кратлив за секое $i \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$. Лесно се покажува дека за да еден асоцијатив биде кратлив доволно е да биде лево и десно кратлив. Ако една полугрупа е лево кратлива, јасно е и дека секој нејзин подасоцијатив е лево кратлив. Асоцијативите од примерите 2. 1 и 2. 2 се кратливи, а при тоа максималниот покривач на асоцијативот од примерот 2. 1 не е лево — ниту десно — кратлив, додека секој покривач на асоцијативот од 2. 2 е кратлив. Ќе дадеме сега пример на кратлив асоцијатив кој нема кратлив покривач.

Пример 3. 1. Нека Q е множеството од сите конечни низи $x_1 x_2 \cdots x_k$ формирани од трите елементи a, b, c, а при тоа претпоставуваме дека $x_{i-1}=a,\ x_i=c \Rightarrow x_{i+1} \neq c$. Во Q определуваме бинарна операција $\bullet$ со

$$x_1 x_2 \cdots x_k \bullet y_1 y_2 \cdots y_r = x_1 x_2 \cdots x_k y_1 y_2 \cdots y_r$$

ако десната страна припаѓа на Q, и

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \cdots x_k\, a\, c \bullet c\, y_1 y_2 \cdots y_r &= x_1 x_2 \cdots x_k\, a \bullet c\, c\, y_1 y_1 \cdots y_r \\ &= x_1 x_2 \cdots x_k\, a\, b\, b\, y_1 y_2 \cdots y_r. \end{aligned}$$

Лесно се проверува дека $Q(\bullet)$ е полугрупа и дека во неа е точно равенството $a \bullet c \bullet c = a \bullet b \bullet b$ и следниот закон за кратење $u \bullet v \bullet z = u \bullet v \bullet w \Rightarrow z=w$. Спрема тоа, ако ставиме $*\, u\, v\, w = u \bullet v \bullet w$ добиваме лево кратлив асоцијатив; при тоа полугрупата $Q(\bullet)$ е еден покривач на тој асоцијатив. Нека S е некој покривач на асоцијативот $Q(*)$. Поради $*\, a\, c\, c = *\, a\, b\, b$, во S ќе биде точно равенството $a\, c\, c = a\, b\, b$, од што следува дека S не е полугрупа со лево кратење, бидејќи имаме $c\, c \neq b\, b$ во Q, па значи и во S, бидејќи $Q \subseteq S$. Од ова се гледа дека ниеден покривач на $Q(*)$ не е лево кратлив, и покрај тоа што $Q(*)$ е лево кратлив.

Полугрупата $Q(\bullet)$ определена погоре е максималната полугрупа генерирана од три елементи a, b, c, во која е точно равенството $ab^2 = ac^2$. Слично, ако се земе — на пример — P да е максималната полугрупа генерирана од a, b, c, d, e, f во која се исполнети равенствата $a\, c^2 = a\, b^2$, $e^2\, d = f^2\, d$, ќе се добие кратлив асоцијатив кој нема кратлив покривач.

Горниот пример ја наложува задачата за определување на класата асоцијативи кои имаат кратливи покривачи. Претходно ќе докажеме еден помошен резултат.

Лема 3. 1. Нека S е полугрупа и нека $\{\rho_{ij};\ i=0, 1, 2;\ j=0, 1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots\}$ е низа релации во S определени на следниот начин

$$\begin{aligned}
&1^\circ\ x\,\rho_{00}\,y \Longleftrightarrow x=y;\ 2^\circ\ \{x\,\rho_{0j}\,y \text{ или } (\exists a\in S)\,a\,x\rho_{0j}\,a\,y\} \Longrightarrow x\,\rho_{1j}\,y;\\
(3.\ 2)\quad &3^\circ\ x\,\rho_{1j}\,y \Longrightarrow x\,\rho_{2j}\,y\ \&\ (\forall a\in S)\ a\,x\,\rho_{2j}\,a\,y;\\
&4^\circ\ x\,\rho_{2j}\,y\,\rho_{2j}\,z\,\rho_{2j}\cdots\rho_{2j}\,u \Longrightarrow x\,\rho_{0j+1}\,u.
\end{aligned}$$

Тогаш релацијата $\rho=\bigvee_{j=0}^{\infty}\rho_{0j}$ е конгруенција во S, а соодветната полугрупа S/ρ е лево кратлива. Ако ω е конгруенција во S таква да S/ω е лево кратлива полугрупа, тогаш имаме $\rho\leq\omega$, т. е. ρ е минималната лево кратлива конгруенција во S.

Доказ. Да напоменеме прво дека резултатот за егзистенција на минимална кратлива конгруенција во една полугрупа е добро познат (Да се види на пример [9] стр. 32). Доказот на тој резултат е и тривијален ако се земе предвид фактот да пресек на кратливи конгруенции е конгруенција од ист вид. Но нам ќе ни биде потребно да знаеме како постапно се доаѓа до таа минимална конгруенција, а тоа се гледа од (3. 2). Ќе покажеме сега дека погоре определената релација ρ е навистина минималната лево кратлива конгруенција во S. Прво, јасно е дека ако ω е лево кратлива конгруенција, т. е. ако $ax\,\omega\,ay \Longrightarrow x\,\omega\,y$, тогаш $\rho_{ij}\leq\omega$, па значи и $\rho\leq\omega$. Исто така, од (3. 2) се гледа дека сите релации ρ_{0j} се еквивалентности, па значи таква е и ρ. Со индукција по j се добива дека $x\,\rho_{0j}\,y \Longrightarrow ax\,\rho_{0j}\,ay\ \&\ xa\,\rho_{0j}\,ya$ од што следува дека ρ е и конгруенција. На крајот, нека претпоставиме дека $ax\,\rho\,ay$; тогаш, постои j такво да $ax\,\rho_{0j}\,ay$, од што следува $x\,\rho_{1j}\,y$, а потоа и $x\,\rho_{0j+1}\,y$, и конечно $x\,\rho\,y$. Со тоа го комплетиравме доказот на лемата

Теорема 3.1. Нека $Q(*)$ е лево кратлив n—асоцијатив и нека M е максималниот покривач на $Q(*)$, а ρ минималната лево кратлива конгруенција во M. Постои лево кратлив покривач на $Q(*)$ ако и само ако е исполнет следниот услов

$$(3.\ 3)\quad \begin{aligned}&(\exists\, a_0,\cdots,a_{n-i}\in Q)\quad *\,a_0\cdots a_{n-i}\,b_1\cdots b_i=*\,a_0\cdots a_{n-i}\,c_1\cdots c_i \quad\Longrightarrow\\ &(\forall\, x_0,\cdots,x_{n-i}\in Q)\quad *\,x_0\cdots x_{n-i}\,b_1\cdots b_i=*\,x_0\cdots x_{n-i}\,c_1\cdots c_i.\end{aligned}$$

Во тој случај, M/ρ е максималниот лево кратлив покривач, и секој лево кратлив покривач може Q—хомоморфно да се преслика на некој минимален лево кратлив покривач.

Доказ. Претпоставуваме прво дека е исполнет условот (3. 3). За да докажеме дека M/ρ е максималниот лево кратлив покривач — спрема теоремата 1. 1 и лемата 3. 1 — доволно е да докажеме дела $\rho\in\Omega$ т. е. дека $x,y\in Q\ \&\ x\,\rho\,y \Longrightarrow x=y$.

Од конструкцијата на ρ (лема 3. 1) и максималноста на M (Теорема 1. 2) јасно е дека ако $u\,\rho\,v$; $u=u_1u_2\cdots u_i$, $v=v_1v_2\cdots v_j$; $i,j\leq n$; $u_\nu, v_\lambda\in Q$— тогаш $i=j$.

Да претпоставиме дека $x,y\in Q\ \&\ x\,\rho_{0j}\,y \Longrightarrow x=y$ за секое $j\in\{0,1,\cdots,k\}$; за $j=0$ тоа секако е точно, бидејќи ρ_{00} е релацијата за равенство. Ако $x\,\rho_{1k}\,y$ и $x,y\in Q$, тогаш постои елемент $a=a_1a_2\cdots a_p\in M$ $(a_\nu\in Q)$ таков да $ax\,\rho_{0k}\,ay$; земајќи $d_1,d_2\cdots d_{n-p}$ да се било кои елементи од Q, ќе имаме

$$* d_1 \cdots d_{n-p} a_1 \cdots a_p x \quad \rho_{0k} \quad * d_1 \cdots d_{n-p} a_1 \cdots a_p x,$$

од што спрема индуктивната претпоставка ќе следува

$$* d_1 \cdots d_{n-p} a_1 \cdots a_p x = * d_1 \cdots d_{n-p} a_1 \cdots a_p x,$$

а потоа и $x=y$, поради левата кратливост на $Q(*)$.

Ќе го разгледаме случајот кога $x, y \in Q$, $x=au$, $y=av$, $u \rho_{1k} v$. Тогаш имаме $bu \rho_{0k} bv$ за некое $b \in M$. Нека $b=b_0 b_1 \cdots b_i$, $u=u_1 \cdots u_j$, $v=v_1 v_2 \cdots v_j$ каде b_ν, u_λ, $v_\lambda \in Q$. Разликуваме два случаи: $1^\circ: i+j > n$ и $2^\circ: i+j \leq n$. Ако $i+j > n$, тогаш имаме

$$[b_0 \cdots b_{p-1}(* b_p \cdots b_i u_1 \cdots u_j)] \rho_{0k} [b_0 \cdots b_{p-1}(* b_p \cdots b_i v_1 \cdots v_j)] \tag{3. 4}$$

каде $p=i+j-n$. Ако $d_1, d_2, \cdots, d_{n-p}$ се било кои елементи од Q — и ако се има во вид тоа што ρ_{0k} е конгруенција — од (3. 4) добиваме

$$[* d_1 \cdots d_{n-p} b_0 \cdots b_{p-1} * b_p \cdots b_i u_1 \cdots u_j] \rho_{0k} [d_0 \cdots d_{n-p} b_0 \cdots b_{p-1} * b_p \cdots b_i v_1 \cdots v_j]. \tag{3. 4'}$$

Спрема направената индуктивна претпоставка за ρ_{0k} од (3. 4′) следува дека е точно равенството

$$* d_1 \cdots d_{n-p} b_0 \cdots b_{p-1} * b_p \cdots b_i u_1 \cdots u_j = * d_0 \cdots d_{n-p} b_0 \cdots b_{p-1} * b_p \cdots b_i v_1 \cdots v_j, \tag{3. 4''}$$

а од тоа — поради левата кратливост на $Q(*)$ — се добива

$$* b_p \cdots b_i u_1 \cdots u_j = * b_p \cdots b_i v_1 \cdots v_j. \tag{3. 4'''}$$

Ако се има во вид условот (3. 3) од последното равенство добиваме

$$x = * a_1 \cdots a_{i-p+1} u_1 \cdots u_j = * a_1 \cdots a_{i-p+1} v_1 v_2 \cdots v_j = y$$

каде $a=a_1 \cdots a_{i-p+1}$, $a_\nu \in Q$.

Во случајот $2^\circ: i+j \leq n$ наместо (3. 4) ќе имаме

$$(b_0 \cdots b_i u_1 \cdots u_j) \rho_{0k} (b_0 \cdots b_i v_1 \cdots v_j), \tag{3. 5}$$

а од тоа, после множење од лево со $d_1 \cdots d_p$ каде $p=n-i-j$, и користење на индуктивната претпоставка, го добиваме равенството

$$* d_1 \cdots d_{n-i-j} b_0 \cdots b_i u_1 \cdots u_j = * d_1 \cdots d_{n-i-j} b_0 \cdots b_i v_1 \cdots v_j \tag{3. 5'}$$

Последното равенство — спрема (3. 3) — повлекува $x=au=av=y$.

Со тоа докажавме дека $x, y \in Q$ & $x \rho_{2k} y \Rightarrow x=y$. Од начинот по кој релацијата ρ_{0k+1} е определена со помош на ρ_{2k} јасно е дека е точно и следното: $x, y \in Q$ & $x \rho_{0k+1} \Rightarrow x=y$. Од сето тоа следува дека конгруенцијата ρ_{0i} припаѓа на Ω, за секое i, па значи имаме и $\rho \in \Omega$, што и сакавме да докажеме,

Нека претпоставиме дека $\{\gamma_i\}$ е ланец од лево кратливи конгруенции што припаѓаат на Ω. Унијата $\gamma = \bigvee_i \gamma_i$ е исто така лево кратлива конгруенција што припаѓа на Ω, а од тоа — според лемата на Цорн — Куратовски — следува дека секоја лево кратлива конгруенција од Ω се наоѓа во некоја максимална лево кратлива конгруенција од Ω. Тоа повлекува дека секој лево кратлив покривач на Q може Q—хомоморфно да се преслика на некој минимален лево кратлив покривач на Q.

Преостанува да покажеме дека од егзистенцијата на лево кратливи покривачи следува условот (3. 3). Навистина, нека S е лево кратлив покривач на n—асоцијативот $Q(*)$ и нека биде точно равенството

$$* a_0 \cdots a_{n-i} b_1 \cdots b_i = * a_0 \cdots a_{n-i} c_1 \cdots c_i$$

во $Q(*)$. Тогаш тоа равенство ќе биде исполнето и во S, а после кратењето со $a_0 a_1 \cdots a_{n-i}$ добиваме $b_1 b_2 \cdots b_i = c_1 c_2 \cdots c_i$. Ако $x_0, x_1, \cdots, x_{n-i}$, се елементи од Q ќе имаме $x_0 \cdots x_{n-i} b_1 b_2 \cdots b_i = x_0 \cdots x_{n-i} c_1 c_2 \cdots c_i$ во S, од што следува

$$* x_0 x_1 \cdots x_{n-i} b_1 b_2 \cdots b_i = * x_0 x_1 \cdots x_{n-i} c_1 c_2 \cdots c_i \text{ во } Q,$$

што и сакавме да докажеме.

Со тоа доказот на теоремата е комплетиран.

Ќе ги окарактеризираме асоцијативите за кои максималниот покривач е лево кратлив.

Теорема 3. 2. Максималниот покривач на n—асоцијативот $Q(*)$ е лево кратлив, ако и само ако е исполнет следниот услов

$$(x_1, x_2, \cdots, x_i)\, \varphi\, (y_1, y_2, \cdots, y_i) \Longleftrightarrow \tag{3. 6}$$
$$\Longleftrightarrow (\exists a_0, \cdots, a_{n-i} \in Q)\; * a_0 \cdots a_{n-i} x_1 \cdots x_i = * a_0 \cdots a_{n-i} y_1 \cdots y_i.$$

Доказ. Нека максималниот покривач M на Q е лево кратлив и нека во $Q(*)$ е точно равенството

$$* a_0 \cdots a_{n-i} x_1 \cdots x_i = * a_0 \cdots a_{n-i} y_1 \cdots y_i.$$

Тогаш поради левата кратливост на M, ќе имаме $x_1 x_2 \cdots x_i = y_1 y_2 \cdots y_i$ од што — според теоремата 1. 2 — следува $(x_1, x_2, \cdots, x_i)\, \varphi\, (y_1, y_2, \cdots, y_i)$. Со тоа е покажана точноста на условот (3. 6), бидејќи — во секој n—асоцијатив — е точно следното

$$(x_1, \cdots, x_i)\, \varphi\, (y_1, \cdots, y_i) \Longrightarrow (\forall u_1, \cdots, u_{n-i} \in Q)$$
$$* u_1 \cdots u_{n-i} x_1 \cdots x_i = * u_1 \cdots u_{n-i} y_1 \cdots y_i.$$

Да претпоставиме сега дека е исполнет условот (3. 6) и нека M е максималниот покривач на $Q(*)$. Ако во M е точно равенство од облик $xy = xz$ тогаш постојат $x_\nu, y_\lambda, z_\lambda \in Q$; $i, j \leq n$, такви да

$$x = x_1 x_2 \cdots x_i, \quad y = y_1 y_2 \cdots y_j, \quad z = z_1 z_2 \cdots z_j$$

т. е. имаме

$$x_1 x_2 \cdots x_i y_1 \cdots y_j = x_1 x_2 \cdots x_i z_1 z_1 \cdots z_j. \tag{3. 7}$$

Нека $i+j\leq n$. Множејќи го равенството (3. 7) — од лево — со $d_0 d_1 \cdots d_{n-i-j}$ добиваме

$$(3.\ 7') \qquad * d_0 \cdots d_{n-i-j} x_1 \cdots x_i y_1 \cdots y_j = * d_0 \cdots d_{n-i-j} x_1 \cdots x_i z_1 \cdots z_j$$

од каде, спрема (3. 6), следува $(y_1, y_1, \cdots, y_j)\, \varphi\, (z_1, z_2, \cdots, z_j)$, а потоа — спрема теоремата 1. 2 — добиваме дека е точно равенството

$$y = y_1 y_2 \cdots y_j = z_1 z_2 \cdots z_j = z.$$

Ако $i+j>n$, тогаш равенството (3. 7) може да се претстави во облик

$$(3.\ 7'') \qquad x_1 \cdots x_{p-1} (* x_p \cdots x_i y_1 \cdots y_j) = x_1 \cdots x_{p-1} (* x_p \cdots x_i z_1 \cdots z_j)$$

каде $p=i+j-n$. Од тоа, спрема погоре направената дискусија, следува

$$* x_p \cdots x_i y_1 \cdots y_j = * x_p \cdots x_i z_1 \cdots z_j$$

од што — спрема (3. 6) и теоремата 1. 2 — добиваме $y_1 y_2 \cdots y_j = z_1 z_2 \cdots z_j$, т. е. $y=z$.

Со тоа докажавме дека — во секој случај — од $xy=xz$ следува $y=z$, т. е. дека максималниот покривач M на асоцијативот $Q(*)$ е лево кратлив, и го комплетиравме доказот на теоремата.

Од причини на симетрија, јасни се резултатите што се однесуваат за десно кратливите асоцијативи, а се аналогни на теоремите 3. 1 и 3. 2. Имено, десно кратливиот асоцијатив $Q(*)$ има десно кратлив покривач ако и само ако е исполнет следниот услов

$$(3.\ 3') \qquad \begin{aligned} &(\exists\, a_0, \cdots a_{n-i} \in Q) * b_1 \cdots b_i a_0 \cdots a_{n-i} = * c_1 \cdots c_i a_0 \cdots a_{n-i} \Rightarrow \\ &(\forall\, x_0, \cdots x_{n-i} \in Q) * b_1 \cdots b_i x_0 \cdots x_{n-i} = * c_1 \cdots c_i x_0 \cdots x_{n-i}. \end{aligned}$$

Максималниот покривач на асоцијативот $Q(*)$ е десно кратлив, ако и само ако е исполнет условот

$$(3.\ 6') \qquad \begin{aligned} &(x_1, x_2, \cdots, x_i)\, \varphi\, (y_1, y_2, \cdots, y_i) \Leftrightarrow \\ &(\exists\, a_0, \cdots, a_{n-i} \in Q) * x_1 \cdots x_i a_0 \cdots a_{n-i} = * y_1 \cdots y_i a_0 \cdots a_{n-i}. \end{aligned}$$

Наредните резултати се докажуваат во суштина на ист начин како и претходните, па затоа нема експлицитно да ги формулираме нивните докази.

Теорема 3. 3. Нека $Q(*)$ е кратлив n—асоцијатив. Некој покривач на Q е кратлив ако и само ако се исполнети условите (3. 3) и (3. 3′). Во тој случај, ако M е максималниот покривач на Q и ако ρ е минималната кратлива конгруенција во M, тогаш M/ρ е максималниот кратлив покривач на Q. Секој кратлив покривач на Q може Q—хомоморфна да се преслика на некој минимален кратлив покривач.

Теорема 3. 4. Максималниот покривач на n—асоцијативот Q е кратлив ако и само ако се исполнети условите (3. 6) и (3. 6′).

4. Полијадични групи. За n—асоцијативот $Q(*)$ се вели дека е n—група, ако — за секои $a_1, a_2, \cdots, a_n \in Q$ — равенките

$$(4.\ 1)\qquad *xa_1a_2\cdots a_n=b,\quad *a_1a_2\cdots a_ny=b$$

се решливи по x и y во Q. Оваа класа асоцијативи исцрпно е обработена во работата [12], со тоа што на место n—група се вели полијадична група, а тоа ќе го правиме и ние кога нема да има потреба да го истакнеме специјално бројот n. Во работата [7] (Теорема 2) докажано е дека секој покривач на една полијадична група е група (т. е. 1—група).

Во наредната теорема ќе дадеме поисцрпен опис на класата покривачи од една полијадична група (од колку што тоа е направено во теорамата 1. 1).

Теорема 4. 1. Нека M е максималниот покривач на n—групата $Q(*)$ и нека Γ е фамилијата на сите нормални подгрупи A од M со следните особини (i) A е конечна циклична подгрупа од центарот на групата M, а редот m на A е делител на n; (ii) постојат елементи $a_1, a_2, \cdots, a_r \in Q$ такви да $a=a_1a_2\cdots a_r$ е генератор на A, а при тоа $r=\frac{n}{m}$.

Доказ. Како што е добро познато, секоја конгруенција во една група е окарактеризирана со некоја нормална подгрупа на таа група. Спрема, тоа, фамилијата конгруенции Ω во групата M — спомната во теоремата 1. 1 — можеме да ја сметаме за фамилија од нормални подгрупи B на групата M со следната особина $x, y\in Q\ \&\ y\in Bx \Rightarrow y=x$. Спрема тоа, за докажувањето на теоремата доволно е да покажеме дека $\Omega=\Gamma$.

Нека $A=\{a, a^2, \cdots, a^m=e\}\in\Gamma$. Од ($i$) следува дека A е нормална подгрупа од M. Ако $x, y\in Q$ и ако $y\in Ax$, тогаш имаме $y=a^\nu x$ за некое $\nu\in\{0, 1, \cdots, m-1\}$. Поради $a=a_1a_2\cdots a_r$ и $r\nu+1\leq r(m-1)+1\leq n$, равенството $y=a^\nu x$ е можно само за $\nu=0$ т. е. добиваме дека $y=x$. Со тоа докажавме дека $\Gamma\subseteq\Omega$.

Пред да покажеме дека важи и обратниот однос $\Omega\subseteq\Gamma$, да уочиме дека фамилијата $\{Q, Q^2, \cdots, Q^n\}$ е циклична група со ред n, во однос на операцијата множење на подмножества од групата M. При тоа Q^n е неутралниот елемент, а во исто време Q^n е и нормална подгрупа на M. При тоа множествата Q^i и Q^j се дисјунктни за $1\leq i<j\leq n$.

Нека претпоставиме сега дека $A\in\Omega$, т. е. A е нормална подгрупа од M таква да $x, y\in Q\ \&\ y\in Ax \Rightarrow y=x$. Ако $u\in A\cap Q^n$ и ако $x\in Q$, тогаш имаме $y=xu\in Q$ од што следува $y=x$ т. е. u е неутралниот елемент на групата. Добивме значи, $A\cap Q^n=\{e\}$. Нека $u\in A\cap Q^k$. Ако d е најголемиот заеднички делител на k и n, постојат цели броеви α и β такви да $d=\alpha k+\beta n$. Тогаш, поради $Q^d=Q^dQ^{-\beta n}=Q^{\alpha k}$ елементот $v=u^\alpha$ припаѓа на $Q^d\cap A$. Ако ставиме $n=\xi d$, ќе имаме $v^\xi\in Q^n\cap A$, т. е. $v^\xi=e$. Земајќи w да е произволен елемент од $Q^d\cap A$ добиваме $wv^{\xi-1}\in Q^n\cap A$ од што следува $wv^{\xi-1}=e$, т. е. $w=v$. Со тоа покажавме дека во Q^d постои само еден елемент од A. Ако $k=\eta d$, тогаш $t=v^\eta\in Q^k\cap A$ — од што — на ист начин како и погоре — се добива дека t е единствениот елемент од $Q^k\cap A$. Спрема тоа, за секое $i\in\{1, 2, \cdots, n\}$, во множеството Q^i може да постои најмногу еден елемент од A, и веќе од ова следува дека A е конечна подгрупа со ред $\leq n$.

Нека во Q^i и Q^j постои по еден елемент од A. Од горната дискусија се гледа дека можеме да претпоставиме i и j да се делители на n. Ако d е најголемиот заеднички делител на i и j, тогаш — на ист начин како и погоре — добиваме дека во Q^d се наоѓа еден елемент z од A, а при тоа $z^{i/d}$ е единствениот елемент од $Q^i \cap A$, а $z^{j/d}$ од $Q^j \cap A$. Да претпоставиме дека r е најмалиот природен број таков да $Q^r \cap A$ е непразно множество и нека $a \in Q^r \cap A$. Тогаш, секако, r е делител на n; освен тоа, во Q^k се наоѓа елемент од A ако и само ако r е делител на k, а тогаш $a^{k/r}$ е единствениот елемент од $Q^k \cap A$. Со тоа докажавме дека $A = \{a, a^2, \cdots, a^m = e\}$ каде $m = n/r$.

Ќе покажеме дека a е елемент од центарот на групата M, од што конечно ќе следува дека $A \in \Gamma$, а со тоа доказот на теоремата ќе биде комплетиран. Навистина, ако x е некој елемент од M имаме

$$\{a\,x, a^2\,x, \cdots, a^{m-1}\,x, x\} = A\,x = x\,A = \{x\,a, x\,a^2, \cdots, x\,a^{m-1}, x\}$$

а од тоа следува $ax = xa^\nu$ за некое $\nu \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$. Ако $x \in Q^k$, тогаш имаме $a\,x \in Q^{k+r}$ и $x\,a^\nu \in Q^{\nu r+k}$ од што следува $Q^r = Q^{\nu r}$, т. е. $n \mid r(\nu-1)$. Но, поради $n = mr$ и $\nu \leq m-1$, бројот $r(\nu-1)$ може да се дели со n само за $\nu = 1$, а тогаш ќе имаме $ax = xa$, што и сакавме да докажеме. Со тоа, теоремата е докажана.

Подмножеството Q од полугрупата S велиме дека е n—подгрупа, ако Q е n—подасоцијатив и ако Q — како асоцијатив — е n—група. Јасно е дека една n—подгрупа е kn—подгрупа за секое k. За Q ќе велиме дека е полијадична подгрупа, ако е n—подгрупа за некое n; ако Q е n—подгрупа и ако не постои вистински делител m на n таков да Q биде и m—подгрупа, тогаш Q ќе ја сметаме за вистинска n - подгрупа.

Теорема 4.2. Ако Q е полијадична подгрупа од полугрупата S, тогаш Q е вистинска n - подгрупа за некое n, и при тоа Q е m—подгрупа ако и само ако n е делител на m. Покривачот G на n—групата $Q(*)$ е максимален ако и само ако Q е вистинска n—подгрупа од G.

Доказ. Ќе го докажеме прво вториот дел на теоремата. Ако M е максималниот покривач на n—групата $Q(*)$, од теоремата 1. 2 следува дека Q е вистинска n—подгрупа од M. Да претпоставиме дека G е покривач на $Q(*)$ и дека Q е вистинска n—подгрупа од тој покривач. Спрема теоремата 4. 1. постои конечна циклична подгрупа A од центарот на $M : A = \{a, a^2, \cdots, a^m = e\}$ таква да $n = mr$ и $G \cong M/A$. Ако ставиме $\tilde{Q} = \{A\,x;\ x \in Q\}$, добиваме дека $\tilde{Q}$ е r—подгрупа од M/A, а тоа повлекува Q да е r—подгрупа од G, т. е. добиваме дека n е делител на r, што е можно само за $r = n$. Во тој случај, $A = \{e\}$ е единичната група, т. е. добиваме $G \cong M$. Со тоа покажавме дека G е максимален покривач за Q, т. е. го докажавме вториот дел од теоремата.

Првиот дел на теоремата е следствие од следната

Лема 4.1. Нека Q е подмножество од полугрупата S и нека $Q^{m+1} = Q^{n+1} = Q$. Ако d е најголемиот заеднички делител на m и n, тогаш $Q^{d+1} = Q$.

Доказ. Да претпоставиме дека $n \leq m$ и нека $m = qn + r$. Ако $r = o$ точноста на лемата е јасна. За $r > o$ имаме

$$Q^{r+1} = Q^r\, Q = Q^r\, Q^{qn+1} = Q^m\, Q = Q.$$

Натамошниот тек на доказот е јасен.

Во работата [7] е поставено прашање дали два минимални покривачи од еден асоцијатив можат да бидат неизоморфни. Користејќи ги резултатите од претходните две теореми, со еден пример, ќе покажеме дека одговорот на тоа прашање е потврден.

Пример 4.1. Нека $G = G_1 \times G_2 \times G_3$ е директниот производ на цикличните групи

$$G_1 = \{e, a\};\ G_2 = \{e, b, b^2, b^3\};\ G_3 = \{e, c^{\pm 1}, c^{\pm 2}, \cdots, c^{\pm k}, \cdots\}.$$

Спрема тоа, секој елемент од G може да се претстави еднозначно во облик

$$a^i\, b^j\, c^k$$

каде $i = 0, 1$; $j = 0, 1, 2, 3$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm k, \cdots$. Ако под множеството Q од G го определиме со

(4. 2) $$Q = \{a^i\, b^j\, c^k;\ j + k - 2\, i \equiv 1\ (mod\ 4)\},$$

лесно се проверува дека Q е вистинска 4—подгрупа од G, а и дека Q е генераторно множество за G. Од тоа следува дека G е максимален покривач на Q. Јасно е дека G_1 и G_2 се подгрупи од G, кои ги задоволуваат условите (i) и (ii) изнесени во формулацијата на теоремата 4. 1. Освен тоа, G_1 и G_1 се максимални подгрупи од тој вид, па значи G/G_1 и G/G_2 се минимални покривачи на G, а јасно е дека тие не се изоморфни, бидејќи $G/G_1 \cong G_2 \times G_3$, $G/G_2 \cong G_1 \times G_3$

5. Лево-прости асоцијативи. Лесно се установува дека ако $Q(*)$ е n—група, тогаш — за секое $i \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$ и секоја низа елементи $a_1, a_2, \cdots, a_n, b \in Q$ — равенката

(5. 1) $$*\, a_1 \cdots a_{i-1}\, x a_i \cdots a_n = b$$

е еднозначно решлива во Q. И обратно, ако $n \geq 2$ и ако за некое $i \in \{2, 3, \cdots, n\}$ равенката (5. 1) е решлива во асоцијативот $Q(*)$, тогаш тој асоцијатив е n—група. Но, ако се претпостави решливост на таа равенка за $i = 1$ (или за $i = n + 1$) дадениот асоцијатив не мора да биде n—група; за класата полугрупи (т. е. 1—асоцијативи) тоа е добро познато (да се види, на пример, [3] стр. 312 — 338). Овде ќе изнесеме неколку резултати за класата асоцијативи од тој вид. Имено, n—асоцијативот $Q(*)$ ќе велиме дека е лево-прост, ако — за секоја низа елементи $a_1, a_2, \cdots, a_n, b \in Q$ — равенката

(5. 2) $$*\, x\, a_1\, a_2 \cdots a_n = b$$

е решлива во Q. Со други зборови, еден асоцијатив се наречува лево-прост ако нема нетривијални леви идеали; при тоа подмножеството $A \subseteq Q$ се наречува лев идеал во $Q(*)$, ако $*QQ\cdots QA\subseteq A$. Со наредната теорема се окарактеризира класата покривачи на асоцијативите од овој вид.

Теорема 5.1. Асоцијативот $Q(*)$ е лево-прост ако и само ако неговиот максимален покривач е лево-проста полугрупа. Во тој случај, сите покривачи на $Q(*)$ се лево-прости полугрупи.

Доказ. Нека S е покривач на лево-простиот n-асоцијатив $Q(*)$, и нека $a=a_1a_2\cdots a_i$, $b=b_1b_2\cdots b_j$ се два елементи од S, каде $a_\nu, b_\lambda\in Q$. Ако $c_1, c_2, \cdots, c_{n-i}$ се некои елементи од Q, постои $z\in Q$ такво да $*zc_1\cdots c_{n-i}a_1\cdots a_i=b_j$. Од тоа следува дека

$$x=b_1\cdots b_{j-1}\,z\,c_1\cdots c_{n-i}\,a_1\cdots a_i$$

е решение на равенката $xa=b$. Значи S е лево-проста полугрупа. Да претпоставиме сега дека максималниот покривач M на $Q(*)$ е лево-проста полугрупа. Значи — за секои $a, b\in M$ — равенката $xa=b$ е решлива во M. Од тоа следува дека и равенката $xa_1a_1\cdots a_n=b$ (каде $a_\nu, b_\lambda\in Q$) има решение во M, а спрема теоремата 1.2, јасно е дека тогаш x припаѓа на Q. Од тоа следува дека $Q(*)$ е лево-прост асоцијатив. Со тоа точноста на теоремата е докажана.

Пример 5.1. Нека $Q(*)$ е n—група, а J непразно множество. Ако во множеството $G\times J$ определиме операција $*$ со

$$*(x_0, i_0)(x_1, i_1)\cdots(x_n, i_n)=(*\,x_0x_1\cdots x_n, i_0), \tag{5. 3}$$

добиваме лево-прост асоцијатив. Во наредната теорема ќе дадеме една карактеристика на асоцијативите определени со овој пример.

Теорема 5.2. Лево-простиот n—асоцијатив $Q(*)$ е изоморфен со некој асоцијатив $G\times J$ определен во примерот 5.1., ако и само ако постои n—орка елементи $a_1, a_2, \cdots, a_n\in Q$ таква да

$$*\,a_na_1a_2\cdots a_n=a_n. \tag{5. 4}$$

Доказ. Познато е (да се види, на пример, [12] стр. 214) дека во секоја n—група постои неутрален слог, т.е. таква низа елементи $e_1, e_2, \cdots, e_n$ да равенството

$$*\,xe_1e_2\cdots e_n=*\,e_1e_2\cdots e_nx=x \tag{5. 5}$$

е идентично точно во n—групата. Од тоа следува дека во секој асоцијатив $G\times J$ (определен како во примерот 5.1) постои низа елементи $a_1, a_2, \cdots, a_n$ таква да биде точно равенството (5.4) (Имено, можеме да ставиме $a_\nu=(e_\nu, i)$.

Да претпоставиме сега дека $Q(*)$ е лево прост n—асоцијатив, во кој е исполнето равенството (5.4), за некоја низа елементи $a_1, a_2, \cdots, a_n\in Q$, и нека M е максималниот покривач на $Q(*)$. Спрема тоа, M е лево-проста полугрупа во која е точно равенството

$$a_1a_2\cdots a_n\;a_1a_2\cdots a_n=a_1a_2\cdots a_n,$$

т. е. $a_1 a_2 \cdots a_n$ е идемпотентен елемент во M. Од тоа следува (да се види, на пример, [3] стр. 316) дека полугрупата M е изоморфна со полугрупа од облик $N \times J$, каде N е група, J непразно множество, а операцијата е определена со $(x, i)(y, j) = (xy, i)$. Според тоа, асоцијативот $Q(*)$ е изоморфен со некој n—асоцијатив $\tilde{Q}(*)$, за кој $N \times J$ е максимален покривач.

Нека (x, i) е даден елемент од $N \times J$. Имајќи предвид дека $\tilde{Q}$ е генераторно множество за $N \times J$, заклучуваме дека постојат елементи $(x_0, i_0), (x_1, i_1), \cdots, (x_k, i_k)$ во $\tilde{Q}$ такви да

$$(5.\ 6) \qquad (x, i) = (x_0, i_0)(x_1, i_1) \cdots (x_k, i_k) = (x_0 x_1 \cdots x_k, i_0)$$

од што следува $i = i_0$. Според тоа, за секое $i \in J$, постои елемент $x_0 \in N$ таков да $(x_0, i) \in \tilde{Q}$.

Да го означиме со G множеството што ги содржи сите елементи $y \in N$ такви да $(y, i) \in \tilde{Q}$ за некое $i \in J$. Јасно е дека елементите x_ν што фигурираат во равенството (5. 6) припаѓаат на G, а од тоа следува дека G е генераторно множество за полугрупата N. Освен тоа, ако $x_0, x_1, \cdots, x_n \in G$, имаме $(x_\nu, i_\nu) \in \tilde{Q}$ за некои $i_\nu \in J$, па значи

$$(x_0, i_0) \cdots (x_n, i_n) = (x_0 x_1 \cdots x_n, i_0) \in \tilde{Q},$$

од што следува дека $x_0 x_1 \cdots x_n \in G$, т. е. добиваме дека G е n—подасоцијатив од N.

Нека $(x, i) \in G \times J$. Од дефиницијата на G следува дека $(x, j) \in \tilde{Q}$ за некое $j \in J$. Ако e е неутралниот елемент на групата N, тогаш имаме $(e, i) = (a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_k, i_k)$ (за некои $(a_v, i_v) \in \tilde{Q}$, $k \leq n$), од што следува

$$(5.7) \qquad (x, j) = (x, j)(a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_k, i_k).$$

Поради максималноста на покривачот $N \times J$, од (5. 7) прво добиваме $k = n$, а потоа и

$$(5.8) \qquad (x, i) = (e, i)(x, j) = (a_1, i_1) \cdots (a_n, i_n)(x, j) \in \tilde{Q},$$

бидејќи $\tilde{Q}$ е n—полугрупа. Со тоа покажавме дека $G \times J \subseteq \tilde{Q}$, а од дефиницијата на G јасно е дека $\tilde{Q} \subseteq G \times J$. Според тоа, имаме $\tilde{Q} = G \times J$.

Преостанува да покажеме дека G е n—подгрупа од N. Ако $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и b се дадени елементи од N, тогаш постојат $x = x_1 x_\cdot \cdots x_k, y = y_1 \cdots y_r \in N$, $x_v, y_\lambda \in G$ такви да

$$(5.9) \qquad b = x a_1 a_2 \cdots a_n = a_1 a_2 \cdots a_n y.$$

Ако i е било кој елемент од J (имајќи предвид дека $\tilde{Q} = G \times J$) од (5. 9) добиваме

$$(5.9') \qquad \begin{aligned} (b, i) &= (x_1, i) \cdots (x_k, i)(a_1, i) \cdots (a_n, i) \\ &= (a_1, i) \cdots (a_n, i)(y_1, i) \cdots (y_r, i), \end{aligned}$$

од што (пак поради максималноста на покривачот $N \times J$) следува $k=r=1$, т. е. $x(=x_1), y(=y_1) \in G$. Докажавме, значи, дека G е n–подгрупа од N.

Со тоа теоремата е во потполност докажана.

Да напомениме дека во работата [8] се дадени и неколку други карактеристични особини на класата асоцијативи определена со примерот 5. 1. Покрај другото, докажано е дека ако n—асоцијативот $Q(*)$ е унија на фамилија n—групи секоја од кои е десен идеал, тогаш $Q(*)$ е изоморфен со n—асоцијатив од облик $G \times J$. (При тоа за подмножеството B од Q велиме дека е десен идеал, ако $*BQ \cdots Q \subseteq B$). ([6] Теорема 1). Овој резулќе го искористиме при докажувањето на наредната теорема.

Теорема 5.3. Нека $\{G_j; j \in J\}$ е фамилија n—подгрупи од полугрупата S, такви да (*i*) $S = \underset{i \in J}{U} G_j$ и (*ii*) $S^n G_j \subseteq G_j$ за секое $j \in J$. Постои група G таква да полугрупата S е изоморфна со полугрупата $G \times J$, каде операцијата е определена со $(x, i)(y, j) = (xy, i)$.

Доказ. Ако полугрупата S ја сметаме за n—асоцијатив, тогаш-спрема спомнатиот резултат на работата [6]—постои n—група $G(*)$ таква да S (како n—асоцијатив) е изоморфен со n—асоцијативот $G \times J$, при што производот во $G \times J$ е определен со

$$(x_0, i_0)(x_1, i_1) \cdots (x_n, i_n) = (* x_0 x_1 \cdots x_n, i_0) \tag{5.10}$$

Затоа, можеме да сметаме дека $S = G \times J$ и $G_j = \{(x, j); x \in G\}$. Од технички причини, ќе претпоставиме дека $n=3$, а наместо $*xyzu$ ќе пишуваме само $xyzu$.

Ако $x, y \in G; i, j \in J$ и ако e_1, e_2, e_3 е неутрален слог во G, ќе имаме

$$\begin{aligned}(x, i)(y, j) &= (x, i)(y, j)(e_1, i)(e_2, i)(e_3, i)\\ &= (xy e_1 e_2, i)(e_3, i)\end{aligned}$$

Од тоа следува дека можеме да ставиме

$$(x, i)(y, j) = (\varphi(x y e_1 e_2; i), \psi(x y e_1 e_2; i)) \tag{5.11}$$

каде φ е пресликување од $G \times J$ во G, а ψ од $G \times J$ во J. Ако се има предвид (5.10)—за $n=3$— од (5.11) се добива

$$\begin{aligned}(x y z u, i) = (x, i)(y, j)(z, k)(u, k) = (&\varphi(x \varphi(y \varphi(zu e_1 e_2; k) e_1 e_2; j) e_1 e_2; i),\\ &\psi(x \varphi(y \varphi(z u e_1 e_2; k) e_1 e_2; j) e_1 e_2; i))\end{aligned}$$

т. е.

$$x y z u = \varphi(x \varphi(y \varphi(z u e_1 e_2; k) e_1 e_2; j) e_1 e_2; i) \tag{5. 12}$$

и

$$i = \psi(x \varphi(y \varphi(zu e_1 e_2; k) e_1 e_2; j) e_1 e_2; i). \tag{5. 13}$$

Од (5. 12) следува дека φ не зависи од втората компонента, а од (5. 13) дека $i = \psi(x, i)$; овде се користи и тоа што G е 3—група.

Ако ставиме

$$x \circ y = \varphi(x\, y\, e_1\, e_1;\, i) \tag{5. 14}$$

равенствата (5. 11) и (5. 12) ги добиваат следните облици

$$(x, i)(y, j) = (x \circ y, i) \tag{5. 11'}$$

$$xyzu = x \circ (y \circ (z \circ u)). \tag{5. 12'}$$

Од (5. 11′) и тоа што $G \times J$ е полугрупа следува дека и $G(\circ)$ е полугрупа. Ако e_1, e_2, e_3 е неутрален слог на 3—групата G, од (5. 12′) се добива дека $e = e_1 \circ e_2 \circ e_3$ е неутрален елемент во полугрупата $G(\circ)$, а потоа и дека е точно равенството

$$x \circ y = x\, e\, e\, y \tag{5. 15}$$

од што лесно се установува дека $G(\circ)$ е група.

Со тоа е докажана точноста на теоремата за $n=3$. Во суштина на ист начин се спроведува доказот и за произволно n.

6. Неколку забелешки. Овде ќе изнесеме неколку проблеми кои се во врска со резултатите добиени во оваа работа.

6. 1. Имајќи го во вид тоа што секој n—асоцијатив може да се вметне во полугрупа, претпоставуваме дека постои можност полугрупите да се проучуваат со помош на нивните подасоцијативи. Нека со $L_n(S)$ ја означиме фамилијата од сите n—подасоцијативи на дадена полугрупа S, при што празното подмножество исто така го сметаме за подасоцијатив. Јасно е дека $L_n(S)$ е комплетна мрежа. Може да се постави прашањето до која мера полугрупата е окарактеризирана од фамилијата $\{L_n(S);\, n=1, 2, \cdots\}$. Или, како се одразува на полугрупата S некое нетривијално равенство од облик $L_n(S) = L_m(S)$. (Ако S е група, лесно се уочува дека равенството $L_1(S) = L_2(S)$ е еквивалентно со условот секој елемент од S да има конечен непарен ред.)

6. 2. Резултатите од **2**, **3** и **5** наметнуваат задача за испитување на класите асоцијативи чии покривачи припаѓаат на определена класа полугрупи. Отворено е прашањето дали од кратливоста на максималниот покривач на еден асоцијатив следува дека се кратливи сите покривачи на тој асоцијатив. Исто така, не е познато дали од тоа што некој покривач на еден асоцијатив е лево проста полугрупа следува дека и самиот асоцијатив е лево прост. Теоремата 5. 3 (и аналогниот резултат за полугрупите [10] стр. 159) го наметнува прашањето дали полугрупата S која е унија на фамилија n—подгрупи $\{G_i;\, i \in J\}$ такви да $G_i S^{n-1} G_i \subseteq G_i$, е комплетно проста.

6. 3. Во работите [1] и [11] покажано е дека секоја n—група може да се добие од група без додавање на нови елементи, но затоа пак операцијата на n—групата не се добива како обичен производ на групата, а со помош на некој автоморфизам; во работата [1] се добиваат и неколку поопшти резултати од тој вид. Сметаме дека е од специјален интерес класата асоцијативи $Q(*)$ такви да $Q(\circ)$ биде покривач за некоја бинарна операција "$\circ$" во Q.

6. 4. Ако во n—оперативот $Q(*)$ — за секои $a_1, a_2, \cdots, a_n, b \in Q$ и секое $i \in \{1, 2, \cdots, n, n+1\}$— равенката

$$* a_1 \cdots a_{i-1} x a_i \cdots a_n = b \tag{6. 1}$$

е еднозначно решлива во $Q(*)$, тогаш се вели дека $Q(*)$ е n—квазигрупа. Претпоставуваме дека секоја n—квазигрупа $Q(*)$ може да се вметне во квазигрупа (т. е- 1—квазигрупа) така да биде точно равенството

$$* x_0 x_1 \cdots x_n = (\cdots ((x_0 x_1) x_2) \cdots x_{n-1}) x_n \tag{6. 2}$$

за секои $x_\nu \in Q$.

Ако a е фиксен елемент од групата G и ако операцијата $*_a$ ја определиме со

$$*_a x_0 x_1 \cdots x_n = x_0 a x_1 \cdots x_n \tag{6. 3}$$

ќе добиеме (o, n)—асоцијативна n—квазигрупа $Q(*_a)$. Овој пример го наметнува прашањето дали секоја (o, n)—асоцијативна n—квазигрупа може да се добие од група на тој начин.

Претставувањето на една квазигрупа со повеќе бинарни операции е предмет на испитување на работите [4] и [5]. При тоа не се врши проширување на основното множество.

6. 5. Напуштајќи ги претпоставките операциите на еден прстен да бидат бинарни, се доаѓа до поопштиот поим за $[m, n]$—прстен. Имено, алгебарската структура $P(\square, *)$ се наречува $[m, n]$—прстен, ако се исполнети следните услови: (1°) $P(\square)$ е комутативна m—група; (2°) $P(*)$ е n—асоцијатив; (3°) операцијата $*$ е дистрибутивна спрема $\square$, т. е. — за секое $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$— точно е идентичното равенство

$$\begin{aligned} & * x_0 x_1 \cdots x_{i-1} \square y_0 y_1 \cdots y_m x_{i+1} \cdots x_n = \\ & \square * x_0 x_1 \cdots x_{i-1} y_0 x_{i+1} \cdots x_n * \cdots * x_0 \cdots x_{i-1} y_m x_{i+1} \cdots x_n. \end{aligned} \tag{6. 4}$$

Во работата [8] е покажано дека секој $[m, n]$—прстен може да се вметне во (бинарен) прстен. Природно се наложува проучување на $[m, n]$—прстените аналогно на изучувањето на асоцијативите спроведено во оваа работа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. М. Глускин, О позиционных оперативах, ДАН СССР 157, 4 (1964) 767—770.

[2] А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, Москва 1962.

[3] Е. С. Ляпин, Полугруппы, Москва 1960.

[4] М. Д. Сандик. Вполне приводимые n—квазигрупы (во печат).

[5] М. Д. Сандик, О единствености представления n—квазигрупы, Иследов. по Общей алгебре, Акад. Наук Молд. СССР 1965 123—135.

[6] Б. Л. Трпеновски, За некои n—полугрупи што се унии на n—групи, Билтен Друшт. матем. физ. СР Македонија 16 (1965).
[7] Ѓ. Чупона, За асоцијативните конгруенции, Билтен Друшт. матем. физ. СР Македонија 13 (1962) 5—12.
[8] Ѓ, Чупона, За $[m, n]$—прстените, Билтен Друшт. матем. физ. СР Макед. 16 (1965).
[9] R. H. Bruck, A survey of binary systems, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1958.
[10] G. Čupona, On completely simple semigroups, Glasnik matem. fiz. astr. 18 (1963) 159 — 164.
[11] M. Hosszu, On the explicit form of n—group operations, „Publs math.“ 10 (1963) 88 — 92.
[12] E. L. Post, Polyadic groups, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940) 208 — 350.

SEMIGROUPS GENERATED BY ASSOCIATIVES

G. Čupona

(Summary)

Every associative (i.e. universal algebra with a finitary associative operation) can be covered by a semigroup [7]. The object of this paper is to establish some connections between properties of an associative and the corresponding class of covering semigroups.

1. Preliminary definitions and results. If $* : (x_0, x_1, \cdots x_n) \rightarrow * x_0 x_1 \cdots x_n$ is an $n+1$—ary operation on a (non—empty) set Q, then $Q(*)$ is said to be an n—operative. By putting

$$(1.\ 1.) \qquad *^0 x = x, \ *^{k+1} x_0 x_1 \cdots x_{(k+1)\, n} = **^k x_0 x_1 \cdots x_{(k+1)\, n}$$

we obtain a kn—operative for every $k \geq 0$. The n—operative $Q(*)$ is said to be (i, j) — associative if the following identity holds in $Q(*)$

$$(1.\ 2) \qquad * x_0 \cdots x_{i-1} * x_i \cdots x_{2n} = x_0 \cdots x_{j-1} * x_j \cdots x_{2n}.$$

And, $Q(*)$ is called an n—associative if it is (i, j) – associative for every pair i, j: $o \leq i \leq j \leq n$. Clearly, if $Q(*)$ is an n—associative then $Q(*^k)$ is also a kn—associative.

Let S be a semigroup (i. e. a 1—associative), and $Q(*)$ an n – associative such that $Q \subseteq S$ and $* x_0 x_1 \cdots x_n = x_0 \cdot x_1 \cdots x_n$ for all $x_\nu \in Q$. Then $Q(*)$ is said to be an n—subassociative of S; and if Q is a generating subset of the semigroup S, then S is said to be a covering semigroup of $Q(*)$. Every semigroup isomorphic with S is also assumed to be a covering of $Q(*)$. Let S_1 and S_2 be two coverings of an n—associative $Q(*)$, and θ a homomorphism of S_1 onto S_2, which induces the identity mapping on Q; every such homomorphism is said to be a Q – homomorphism. Let Σ be a class of coverings of $Q(*)$, and $P \in \Sigma$. If for every $S \in \Sigma$ there is a Q—homomorphism of P onto S, then P is said to be a maximal (or free) Σ—covering of $Q(*)$. And, $K \in \Sigma$ is said to be a minimal Σ—covering if every Q—homomorphism of K onto a covering $R \in \Sigma$ is an isomorphism. Clearly, two maximal Σ—coverings of an associative are isomorphic, but there may exist two non—isomorphic minimal coverings (see example 4. 1).

Theorem 1. 1. The class of all coverings of an associative $Q(*)$ is non—empty, and there are maximal and minimal coverings of $Q(*)$. Let M be the maximal covering of $Q(*)$ and let Ω be the collection of congruences ρ in M such that $x, y \in Q \,\&\, x \rho y \Rightarrow x = y$. Then, a semigroup S is a covering of $Q(*)$ if and only if there is a $\rho \in \Omega$ such that $S \simeq M/\rho$. Every covering of $Q(*)$ can be Q—homomorphically mapped onto a minimal covering of $Q(*)$.

Theorem 1. 2. Let $Q(*)$ be an n—associative, and $x_1, x_2, \cdots x_k, y_1, y_2, \cdots, y_k$ elements of Q such that

$$x_1 = *^{r_1} a_1 \cdots a_{r_1 n+1}\,;\, x_2 = *^{r_2} \cdots a_{(r_1+r_2)\, n+2}\,; \cdots ; x_k = *^{r_k} \cdots a_t$$

$$y_1 = *^{s_1} a_1 \cdots a_{s_1 n+1}\,;\, y_2 = *^{s_2} \cdots a_{(s_1+s_2)\, n+2}\,; \cdots ; y_k = *^{s_k} \cdots a_t\,,$$

for some $a_1, a_2, \cdots, a_t \in Q$ and non—negative integers $r_1, \cdots, r_k, s_1, \cdots, s_k$ where $t-k = (r_1 + \cdots + r_k)\, n = (s_1 + \cdots + s_k)\, n$. Then we write $(x_1, \cdots, x_k)\, \varphi_0\, (y_1, \cdots, y_k)$ and $\mathbf{u} \varphi \mathbf{v}$ if there exist $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \cdots, \mathbf{z}$ such that $\mathbf{u} \varphi_0 \mathbf{x} \varphi_0 \cdots \varphi_0 \mathbf{z} \varphi_0 \mathbf{v}$. Let M be the maximal covering of $Q(*)$. If $x_1, x_2, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_p \in Q$ and $k, p \leq n$ then the equation $x_1 x_2 \cdots x_k = y_1 y_2 \cdots y_p$ is satisfied if and only if $(x_1, \cdots, x_k)\, \varphi\, (y_1, \cdots, y_k)$ and $p = k$.

Theorems 1.1 and 1.2 are two parts of the main result of the paper [7]. We note that —folowing Gluskin's paper [1]— in this papes we have made some modifications of terminology.

2. Commutative associatives. An associative $Q(*)$ is called commutative if for all $x_v \in Q$ and permutations ξ of $0, 1, 2, \cdots, n$, the following equation is satisfied

$$* x_0 x_1 \cdots x_n = * x_{0\xi}\, x_{1\xi} \cdots x_{n\xi}\,. \tag{2. 1}$$

Clearly, if a covering of an associative $Q(*)$ is commutative, then $Q(*)$ is also commutative.

Example 2. 1. Let $Q = \{1, 3, 5, \cdots, 2k+1, \cdots\}$ be the set of impair natural numbers, and let $\square\, x y z = x + y + z$. The 2—operative $Q(\square)$ is a commutative associative, and a semigroup S is a covering of $Q(\square)$, if and only if it is isomorphic with the additive semigroup of natural numbers. Therefore, every covering of $Q(\square)$ is commutative. If $H = Q \smallsetminus \{1\}$, then $H(\square)$ is also a commutative 2—associative, but the maximal covering of $H(\square)$ is not commutative. The additive semigroup of the set $S = \{3, 5, 6, 7, 8, \cdots, n, n+1, \cdots\}$ is a commutative covering of $H(\square)$.

Theorem 2. 1. Let $Q(*)$ be a commutative associative, and M the maximal covering of $Q(*)$. If $x, y \in M$ *and if* $x = u_1 u_2 \ldots u_k$, $y = u_{1\xi} u_{2\xi} \cdots u_{k\xi}$, for some $u_v \in M$ and a permutation ξ of $1, 2, \cdots, k$, then we write $x \psi_0 y$. The transitive extension ψ of ψ_0 (i. e. $u \psi v \Leftrightarrow u \psi_0 x \psi_0 \cdots \psi_0 v$ for some $x, y, \cdots$) is a congruence in M, and the corresponding factor—semigroup M/ψ is the maximal commutative covering of $Q(*)$. There exist minimal commutative coverings of $Q(*)$.

Theorem 2. 2. Let $Q(*)$ be a commutative n-associative, and denote by P the set $Q \setminus *Q^{n+1}$, where $*Q^{n+1} = \{*x_0 x_1 \cdots x_n ; x_v \in Q\}$. Then, every covering of $Q(*)$ is commutative if and only if the set P does not contain more than one element.

3. Cancellative associatives. An n—associative $Q(*)$ is said to be i—cancellative if

$$(3.\ 1) \qquad *a_1 \cdots a_{i-1} x\,\mathbf{b} = *a_1 \cdots a_{i-1}\, y\,\mathbf{b} \Rightarrow x = y;$$

and we say that $Q(*)$ is left (right) cancellative if $i = n+1$ $(i = 1)$. The n—associative $Q(*)$ is said to be cancellative if it is i—cancellative for each $i \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$. Clearly, if a covering of $Q(*)$ is cancellative, then $Q(*)$ is also cancellative. The associatives $Q(\square)$ and $H(\square)$ (given in the example 2. 1) are cancellative, and every covering of $Q(\square)$ is cancellative, but the maximal covering of $H(\square)$ is not cancellative; the semigroup $S(+)$ is a cancellative covering of $H(\square)$.

Example 3. 1. Let $Q(\cdot)$ be the semigroup generated by six elements a, b, c, d, e and f, subject to the generating relations $ac^2 = ab^2$, $f^2 d = e^2 d$. By putting $*xyz = x \cdot y \cdot z$ we obtain a cancellative associative, but there does not exist a cancellative covering of $Q(*)$.

Teorem 3. 1. (3. 2). Let $Q(*)$ be a left (right) cancellative n—associative. There exists a left (right) cancellative covering of $Q(*)$, if and only if the following statement is satisfied

$$(3.\ 2) \qquad [(\exists\, \mathbf{a}) * \mathbf{ab} = * \mathbf{ac}] \Rightarrow [(\forall\, \mathbf{x}) * \mathbf{xb} = * \mathbf{xc}]$$

$$((3.\ 3) \qquad [(\exists\, \mathbf{a}) * \mathbf{ba} = * \mathbf{ca}] \Rightarrow [(\forall\, \mathbf{x}) * \mathbf{bx} = * \mathbf{cx}]).$$

Suppose that this statement is satisfied, and let α be the minimal congruence in the maximal covering M of $Q(*)$, such that the factor-semigroup M/α is left (right) cancellative. Then M/α is the maximal left (right) cancellative covering of $Q(*)$, and there exists a minimal left (right) cancellative covering of $Q(*)$.

Theorem 3. 3. (3. 4). The maximal covering of an associative $Q(*)$ is left (right) cancellative, if and only if the following proposition is satisfied in $Q(*)$

$$(3.\ 4) \qquad [(\exists\, \mathbf{a}) * \mathbf{ax} = * \mathbf{ay}] \Leftrightarrow \mathbf{x}\, \varphi\, \mathbf{y}$$

$$((3.\ 5) \qquad [(\exists\, \mathbf{a}) * \mathbf{xa} = * \mathbf{ya}] \Leftrightarrow \mathbf{x}\, \varphi\, \mathbf{y}).$$

Theorem 3. 5. Let $Q(*)$ be a cancellative associative. There exists a cancellative covering of $Q(*)$, if and only if the statements (3. 2) and (3. 3) are satisfied. And, the maximal covering of $Q(*)$ is cancellative, if and only if the statements (3. 4) and (3. 5) are satisfied.

4. n—Groups. An n—associative $Q(*)$ is an n—group, if — for all $b, a_v \in Q$ — there exist $x, y \in Q$ such that $*x a_1 \cdots a_n = *a_1 \cdots a_n y = b$. In the paper [7] (Theorem 2), it is shown that every covering of an n—grup is a group.

Theorem 4.1. Let M be the maximal covering of an n—group $Q(*)$, and let Γ be the collection of the subgroups A of M satisfying the following conditions: (1°) A is a finite cyclic subgroup of the centre of the group M and the order m of A is a divisor of n; (2°) There exist $a_1, a_2, \cdots, a_r \in Q$ such that $a=a_1 a_2 \cdots a_r$ is a generator of A, where $r=n/_m$. Then, the group G is a covering of $Q(*)$ if and only if there exists an $A \in \Gamma$ such that $G \simeq M/A$.

A subassociative Q of an n—group G is said to be an n—subgroup of G, if Q —as an associative — is an n—group. Clearly, then Q is a kn—subgroup for every natural k. And, if there is not a proper divisor m of n such that Q is an m—subgroup, then Q is said to be a proper n—subgroup of G.

Theorem 4.2. Let G be a group, and Q an m—subgroup of G. There exists one and only one n such that Q is a proper n—subgroup of G, and then Q is a k—subgroup of G if and only if n is a divisor of k. A covering G of an n—group $Q(*)$ is maximal if and only if Q is a generating proper n—subgroup of G.

Example 4.1. Let $G=G_1 \times G_2 \times G_3$ be the direct product of the cyclic groups $G_1=\{e, a\}$, $G_2=\{e, b, b^2, b^3\}$, $G_3=\{e, c^{\pm 1}, c^{\pm 2}, \cdots, c^{\pm m} \cdots\}$. Therefore, every element x of G has a — uniquely determined — form $x=a^i b^j c^k$, where $i=0, 1; j=0, 1, 2, 3$ and $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Let Q be a subset of G defined by

$$Q=\{a^i b^j c^k;\ j+k \cdot 2i \equiv 1 \ (mod\ 4)\}.$$

Then Q is a generating proper 4 - subgroup of G, and therefore G is the maximal covering of Q. The factor-groups G/G_1 and G/G_2 are two non-isomorphic minimal coverings of.

5. Left simple associatives. An associative $Q(*)$ is said to be left simple if there does not exist a non-trivial left ideal in $Q(*)$. (A subset B of Q is said to be a left ideal of $Q(*)$ if $*QQ \cdots QB \subseteq B$).

Theorem 5.1. An associative $Q(*)$ is left simple if and only if its maximal covering is a left simple semigroup. Then, every covering of $Q(*)$ is left simple.

Example 5.1. Let $Q(*)$ be an n—group, J a non-empty set, and $G \times J(\square)$ the n—associative in which the operation is defined by

$$\square (x_0, i_0)(x_1, i_1) \cdots (x_n, i_n)=(* x_0 x_1 \cdots x_n, i_0). \tag{5.1}$$

Then $G \times J(\square)$ is a left simple associative.

Theorem 5.2. A left simple associative $Q(*)$ is isomorphic with an associative $G \times J$ defined as in the preceding example, if and only if there exists a sequence of elements $a_1, a_2, \cdots, a_n \in Q$ such that $* a_n a_1 a_2 \cdots a_n = a_n$.

Theorem 5.3. Let S be a semigroup and $\{G_i; i \in J\}$ a collection of n—subgroups of S such that (1°) $S=\bigcup_i G_i$ and (2°) $S^n G_i \subseteq G_i$, for every $i \in J$. Then, there exists a group G such that $S \simeq G \times J$, where the operation is defined in $G \times J$ by $(x, i)(y, j)=(xy, i)$.