ЗА НЕКОИ РЕЛАЦИИ МЕЃУ БИНАРНИТЕ ОПЕРАЦИИ[1])

Ѓ. ЧУПОНА

О. **УВОД.** Во ова работа се разгледуваат неколку релации меѓу бинарните алгебарски операции, коишто се определуваат, во извесна мерка, слично како релацијата за дистрибутивност. Пред да поминеме на главниот проблем од ова работа, ќе ги споменеме ознаките што ќе ги користиме, а потоа и неколку основни поими за алгебарски структури со бинарни операции.

Нека M е некое множество. За пократко, наместо: „за секоја n-орка елементи $x_1, x_2 \cdots x_n \in M$", „постои некоја n-орка елементи $x_1, x_2 \cdots x_n \in M$" „постои една и само една n-орка $x_1, x_2 \cdots x_n \in M$", ќе пишуваме респективно: $(\forall\, x_1, x_2 \cdots x_n)$, $(\exists\, x_1, x_2 \cdots x_n)$, $(\exists !\, x_1, x_2 \cdots x_n)$. Исто така, често пати, наместо „следува" ќе пишуваме $\rightarrow$, а $\rightleftarrows$ наместо „еквивалентно со".

Ако $(\forall\, x, y)\ (\exists !\, z)\ z = x \cdot y$, велиме дека „$\cdot$" е *бинарна операција* над множеството M, или дека $(M, \cdot)$ е *групоид;* наместо $x \cdot y$ ќе пишуваме xy, а $xy \cdot z$ наместо $(xy)\, z$; аналогно се определуваат: $x \cdot yz$, $xy \cdot uv$ и т. н.

Елементот $e \in M$ е *лево неутрален* во групоидот ако $(\forall\, x, y)\ ex = x$; $a \in M$ е *скратив* од лево ако $(\forall\, x, y)\ ax = ay \rightarrow x = y$; $b \in M$ е *лево асоцијативен* ако $(\forall\, x, y) b \cdot xy = bx \cdot y$; $c \in M$ припаѓа на *центарот* на групоидот ако $(\forall\, x)\ cx = xc$, а за групоидот велиме дека е *комутативен* ако сите елементи од M припаѓаат на центарот; $d \in M$ е *идемпотентен* елемент ако $dd = d$, а за групоидот велиме дека е идемпотентен ако сите елементи од M се идемпотентни. Еднозначното пресликување φ од M во M (т. е. $(\forall x)\ (\exists !\, y)\ y = \varphi(x)$) е *лева транслација* во групоидот, ако $(\forall x, y)\ \varphi(xy) = \varphi(x)\, y$, а *ендоморфизам* ако $(\forall\, x, y)\ \varphi(xy) = \varphi(x)\, \varphi(y)$.

Групоидот $(M, \cdot)$ е *лево редуцибилен*, ако постои некое подмножество M' од M со лево асоцијативни елементи такво да се точни релациите

$$(\forall\, x \in M)\ (\exists !\, x' \in M')\ x'x = x \text{ и } (\forall\, y' \in M')\ (\exists\, y \in M)\ y'y = y,$$

т. е. ако пресликувањето θ дефинирано со $(\forall\, x)\ x' = \theta(x) \rightleftarrows x'\ x = x$ е еднозначно пресликување од M на M'. Во тој случај, за M' велиме дека е едно лево редуцирано множество. Во работата [7] се разгледани некои пошти случаи на редуцибилност.

За групоидите $(M, \cdot)$ и $(M, \cdot *)$ велиме дека се *дуални* ако $(\forall x, y)\ x\, y = y * x$. Ако групоидот $(M, \cdot *)$ има некоја „лева" особина, велиме дека $(M, \cdot)$ ја има соодветната „десна" особина.

Групоидот $(M, \cdot)$ е *полугрупа* ако сите елементи од M се лево асоцијативни; карактеристично следствие на асоцијативноста е тоа што во било

[1]) Дадено во печат на 15 декември 1959 год.

кој производ на повеќе елементи од M не е битен распоредот на заградите. *Квазигрупа* е секој групоид со особината $(\forall\, a, b)\ (\exists!\, x, y)\ a\, x=b,\ y\, a=b$; *лупа* е квазигрупа со неутрален елемент, т. е. елемент e кој е десно и лево неутрален. Секоја асоцијативна лупа (т. е. лупа којашто е и полугрупа) се наречува *група*; особината $(\forall\, x)\ (\exists!\, x^{-1})\ x^{-1}\, x = x\, x^{-1} = e$, заедно со асоцијативноста и егзистенцијата на неутрален елемент, е карактеристична за групите; велиме дека x^{-1} е *инверзен* елемент на x.

Групоидите $(M, \cdot)$ и $(F, \circ)$ се *изоморфни* ако постои некое реципрочно еднозначно пресликување θ од M на F такво да е точна релацијата

$$(\forall x, y \in M)\ \theta\ (x\ y) = \theta\ (x) \circ \theta\ (y).$$

Нека „$\cdot$" и „$+$" се две бинарни операции над множеството M; велиме дека $(M, \cdot, +)$ е една алгебарска структура којашто се добива со спојувањето на групоидите $(M, \cdot)$ и $(M, +)$. Тоа спојување ќе биде оправдано ако постои некоја релација со која се сврзани тие две операции, како на пример релацијата за дистрибутивност. Овде ќе ги разгледаме релациите определени со следните идентитети

(1) $(\forall\ x, y, z\ )\ x\ (y+z) = x + yz$

(2) $(x+y)\ z = x\ y + z$

(3) $x\ (y+z) = xy + z$

(4) $(\forall\ u, v, x, y)\ (u+v)\ (x+y) = u\ v + xy$

(5) $(u+v)\ (x+y) = ux + vy$.

Поради тоа што десните страни на (1), (2) и (4) се добиваат од левите со променување улогата на операциите „$\cdot$" и „$+$", велиме дека со нив се дефинирани релации за *комутативност* меѓу операциите „$\cdot$" и „$+$"; при тоа, со (1) е определена релација за *лева комутативност*, со (2) за *десна комутативност*, а со (4) релација за *комутативност*. Во случајот (3) ќе велиме дека „$\cdot$" е *лево асоцијативна* спрема „$+$", а и обратно дека „$+$" е *десно асоцијативна* спрема „$\cdot$". Релацијата определена со (5) ја наречуваме релација за *симетричност* меѓу дадените две операции.

Во текот на натамошната работа, при некои познати особини на групоидот $(M, \cdot)$ се определува обликот на сите операции „$+$" кои се поврзани со операцијата „$\cdot$" преку некоја од спомнатите пет релации. При тоа се добива дека ако групоидот $(M, \cdot)$ е лево редуцибилен или идемпотентен со егзистенција на некој лево скратив елемент, постои реципрочно еднозначна кореспонденција меѓу десните транслации на групоидот $(M, \cdot)$ и операциите кои се лево комутативни со „$\cdot$"; уште поспецијално, ако $(M, \cdot)$ е полугрупа со неутрален елемент, постојат толку операции лево комутативни со „$\cdot$" колку што има елементи во M. Аналогни резултати можат да се добијат и за десната комутативност. Ако $(M, \cdot)$ е, на пример, група, постои реципрочно еднозначна кореспонденција меѓу ендоморфизмите на таа група и операциите комутативни со „$\cdot$". Во случај кога $(M, \cdot)$ е полугрупа со неутрален елемент, на секое еднозначно пресликување од M во M му кореспондира една операција „$+$" која е десно асоцијативна спрема „$\cdot$", а и обратно.

Постои реципрочно еднозначна коресподенција меѓу операциите „$+$", симетрични спрема „$\cdot$" и паровите ендоморфизми (φ_1, φ_2) од групоидот $(M, \cdot)$, ако тој групоид е, на пример, комутативна група. Некои слични особини на операциите „$\cdot$" и „$+$", при услов да се тие поврзани со некоја од спомнатите релации, ја повлекуваат нивната еднаквост; на пример, ако постои некој заеднички неутрален елемент (лев или десен) за групоидите $(M, \cdot)$ и $(M, +)$, или пак ако и двата групоиди се идемпотентни, од било која од релациите за комутативност следува еднаквоста на операциите „$\cdot$" и „$+$", т. е. $(\forall\, x, y)\ x\,y = x + y$; исто така, ако групоидите $(M, \cdot)$ и $(M, +)$ имаат по еден неутрален елемент, при претпоставка дека „$\cdot$" и „$+$" се взаемно симетрични, се добива еднаквоста на операциите „$\cdot$" и „$+$", а и уште повеќе дека групоидот $(M, \cdot)$ е комутативна полугрупа. Тоа се поглавните резултати на ова работа.

§ 1. Меѓусебно комутативни операции

Прво ќе ја разгледаме релацијата за лева комутативост.

Л е м а 1. 1 *На секоја десна транслација од групоидот* $(M, \cdot)$ *и кореспондира една операција лево комутативна со* „$\cdot$".

Доказ. Нека φ е една десна транслација од $(M, \cdot)$; ако ставиме

(6) $(\forall\, x, y)\ x + y = \varphi\,(x\,y)$,

добиваме

$$(\forall\, x, y, z)\ x\,(y+z) = x \cdot \varphi\,(y\,z) = \varphi\,(x \cdot y\,z) = x + y\,z,$$

т. е. дека „$+$" е лево комутативна со „$\cdot$".

Л е м а 1. 2 Нека $(M, \cdot)$ е идемпотентен групоид со некој елемент скратив од *лево*. *На секоја операција* „$+$" *лево комутативна со* „$\cdot$" *и кореспондира реципрочно еднозначно една десна транслација* φ *таква да е точна релацијата* (6).

Доказ. Нека „$+$" е лево комутативна со „$\cdot$"; ако ставиме $(\forall\, x)\ \varphi\,(x) = x + x$, поради идемпотентноста на „$\cdot$" добиваме

$$(\forall\, x, y)\ x + y = x + y\,y = x\,(y + y) = x\ \varphi\,(y).$$

Ако a е елемент скратив од лево во $(M, \cdot)$ добиваме

$$(\forall\, x, y)\ a\,\varphi\,(x\,y) = a + x\,y = a\,(x + y) = a \cdot x\,\varphi\,(y) \to$$
$$\to \varphi\,(x\,y) = x\,\varphi\,(y),$$

т. е. дека φ е десна транслација во $(M, \cdot)$, па значи точна е и релацијата (6). Претпоставувајќи дека постои и друга транслација ψ која ја задоволува релацијата (6) добиваме

$$(\forall\, x)\ a\,\varphi\,(x) = \varphi\,(a\,x) = \psi\,(a\,x) = a\,\psi\,(x) \to$$
$$\to \varphi\,(x) = \psi\,(x),$$

т, е дека $\varphi = \psi$. Со тоа точноста на 1. 2 е покажана.

Л е м а 1. 3 Ако $(M, \cdot)$ е лево редуцибилен групоид, *на секоја операција „+" лево комутативна со „·" ѝ кореспондира реципрочно еднозначно една десна транслација φ така да е точна релацијата* (6).

Прво ќе покажеме дека е точна следната

Лема 1.4 Ако групоидот $(M, \cdot)$ е лево редуцибилен, тогаш е точна релацијата

(7) $(\forall x, y \in M)\ (x y)' = x' = x' x'$.

Доказ. Од тоа што сите елементи на M се лево асоцијативни следува

$(\forall x, y)\ x' \cdot x y = x' x \cdot y = x y \rightarrow$
$\rightarrow (x y)' = x'$.

Ако $x' \in M'$, спрема дефиницијата на левата редуцибилност, следува дека $(\exists !\, y' \in M')\ y' x' = x'$, а од тоа се добива

$y' x = y' \cdot x' x = y' x' \cdot x = x' x = x$,

од што следува $y' = x'$, т. е. $x' x' = x'$. Со тоа е покажана точноста на 1. 4.

Ќе ја докажеме сега точноста на лемата 1. 3.

Нека „+" е лево комутативна со „·". Ако ставиме $(\forall x)\ \varphi(x) = x' + x$, ќе добиеме

$(\forall x, y)\ x + y = x + y' y = x\ (y' + y) = x \varphi(y)$.

Понатату, спрема (7), добиваме

$$(\forall x, y)\ \varphi(xy) = (xy)' + xy = x' + xy$$
$$= x'(x + y) = x' \cdot x \varphi(y)$$
$$= x' x \cdot \varphi(y) = x \varphi(y),$$

а од тоа следува дека φ е десна транслација.

Од $(\forall x, y)\ x + y = \varphi(xy) = \psi(xy)$ следува

$(\forall x)\ \varphi(x) = \varphi(x' x) = \psi(x' x) = \psi(x)$,

т. е. $\varphi = \psi$.

Со тоа точноста на 1. 3 е покажана.

Од лемите 1. 1, 1. 2, и 1. 3 следува следната

Т е о р е м а 1.5 *Кај секој идемпотентен групоид со барем еден лево скратив елемент и кај секој лево редуцибилен групоид, постои реципрочно еднозначна коресподенција меѓу десните транслации на групоидот и операциите кои се лево комутативни со операцијата на групоидот.*

Кај групоидите со неутрален елемент, множеството од сите десни транслации е наполно определено со множеството на сите десно асоцијативни елементи, што се гледа од наредните две леми.

Л е м а 1.6 *Пресликувањето φ определено со*

(8) $(\forall x)\ \varphi(x) = xa$,

е десна транслација на групоидот $(M, \cdot)$ *ако и само ако a е десно асоцијативен елемент во тој групоид.*

Доказот е очигледен.

Лема 1.7. Ако $(M,\cdot)$ има некој десен неутрален елемент, *секоја негова десна транслација е од облик* (8). Поспецијално, ако групоидот има некој лево скратив елемент, *постои реципрочно еднозначна коресподенција меѓу неговите десно асоцијативни елементи и десните транслации.*

Доказ. Нека e е еден десен неутрален елемент, а φ десна транслација на групоидот; ако ставиме $a=\varphi(e)$, добиваме

$(\forall x)\, \varphi(x)=\varphi(xe)=x\varphi(e)=xa,$

а од тоа, спрема 1.6, следува дека a е десно асоцијативен елемент.

Нека b е некој лево скратив елемент; ако два елементи a_1 и a_2 одредуваат со (8) една иста транслација φ, ќе имаме

$ba_1=\varphi(b)=ba_2\rightarrow a_1=a_2$. Со тоа точноста на 1.7 е покажана.

Забелешка 1.8 Очигледно е дека секој групоид со неутрален елемент e е лево и десно редуцибилен па, од лемите 1.1, 1.3 и 1.7, се добива дека во тој случај на секоја операција „$+$" лево комутативна со „$\cdot$" ѝ кореспондира, реципрочно еднозначно еден десно асоцијативен елемент a; таа кореспонденција е предадена со

(9) $(\forall x,y)\, x+y=xy\cdot a.$

Операцијата „$+$" определена со (9) ќе ја означуваме со „$\cdot_a$" и ќе пишуваме $x_a y$, наместо $x\cdot_a y$. Претпоставувајќи дека $(M,\cdot)$ е полугрупа, ќе ги проучиме особините на операциите „$\cdot_a$", во зависност од елементот a.

Лема 1,9. Нека $(M,\cdot)$ е полугрупа со неутрален елемент и a елемент скратив од лево. Групоидот $(M,\cdot_a)$ *е полугрупа, ако и само ако а припаѓа на центарот на полугрупата* $(M,\cdot)$.

Доказ. Нека e е неутралниот елемент на $(M,\cdot)$. Ако претпоставиме дека $(M,\cdot_a)$ е полугрупа, ќе добиеме

$$(\forall x)\ xaa=eexaa=e_a(e_a x)=(e_a e)_a x$$
$$=eeaxa=axa\rightarrow$$
$$\rightarrow xa=ax,$$

од каде следува дека a е елемент од центарот на полугрупата $(M,\cdot)$.

Обратно, нека a припаѓа на центарот од $(M,\cdot)$; имаме

$(\forall x,y,z)\, x_a(y_a z)=xyzaa=xyaza=(x_a y)_a z,$

т. е. добиваме дека $(M,\cdot_a)$ е полугрупа, а со тоа точноста на 1.9 е покажана.

Лема 1.10 Нека a е десно скратив елемент од центарот на полугрупата $(M,\cdot)$. *Полугрупите* $(M,\cdot_a)$ и $(Ma,\cdot)$[1)] *се изоморфни.*

Доказ. Ако ставиме $(\forall x)\,\theta(x)=xa$, добиваме еднозначно пресликување од M на Ma; при тоа поради скративоста на a, имаме

$\theta(x)=\theta(y)\rightarrow xa=ya\rightarrow x=y,$

т. е. добиваме дека θ е реципрочно еднозначно. Понатака, добиваме

$(\forall x,y)\,\theta(x_a y)=x_a y\, a=xyaa=xa\cdot ya=\theta(x)\,\theta(y),$

а од тоа следува дека $(M,\cdot_a)$ и $(Ma,\cdot)$ се изоморфни полугрупи.

---

1) со Ma е означено множеството што ги содржи сите елементи од облик xa каде x се менува во M.

Забелешка 1.11 Од последната лема не следува дека полугрупите $(M,\cdot)$ и $(M,\cdot_a)$ се изоморфни. На пример, ако $(M,\cdot)$ е мултипликативната полугрупа на целите броеви, имаме $x_2 y=2xy$, од каде следува дека полугрупите $(M,\cdot)$ и $(M,\cdot_2)$ не се изоморфни, оти првата е полугрупа со неутрален елемент, а во втората таков не постои.

Лема 1.12 Нека $(M,\cdot)$ е полугрупа со некој лев неутрален елемент. *Операциите „$\cdot_a$" и „$\cdot_b$" се меѓусебно лево комутативни ако и само ако* $ab=ba$.

Доказ. $ab=ba \rightarrow$

$$\rightarrow (\forall x,y,z)\, x_a(y\, {}_b z)=xyzba=xyzab=x_b(y\, {}_a z)\rightarrow$$

$\rightarrow$ „$\cdot_a$" и „$\cdot_b$" се взаемно лево комутативни.

Обратно, нека e е лев неутрален елемент на $(M,\cdot)$, а „$\cdot_a$" и „$\cdot_b$" се взаемно лево комутативни; имаме

$$ab=eeeab=e(e_a e)\,b=e_b(e_a e)=e_a(e_b e)=ba.$$

Со тоа точноста на 1.12 е покажана.

Од лемите 1.9, 1.10 и 1.12, спрема 1.8, следува точноста на следната

Теорема 1.13. Ако $(M,\cdot)$ е група, наредните три пропозиции се еквивалентни.

1°: *Операцијата „+" е лево комутативна со „$\cdot$" ако и само ако е лево комутативна и со „$\cdot_a$".*

2°: $(M,\cdot_a)$ *е група изоморфна со* $(M\cdot)$.

3°: $(\forall x)\, xa=ax$.

Ќе се задржиме сега на случајот кога $(M,\cdot)$ е десно редуцибилен групоид.

Нека φ е еднозначно пресликување од M во M со особината

$$(9)\quad (\forall x,y)\, xy\cdot\varphi(y)=x\cdot y\varphi(y),\ \varphi(xy)=\varphi(y),$$

а операцијата „+" определена со

$$(10)\quad (\forall x,y)\, x+y=x\cdot y\varphi(y).$$

Лема 1.14 *Операцијата „+" е лево комутативна со „$\cdot$".*

Доказот е очигледен.

Лема 1.15 Нека $(M,\cdot)$ е десно редуцибилен групоид. *На секоја операција „+" лево комутативна со „$\cdot$" ѝ кореспондира едно пресликување φ со особината $(\forall x,y)\ \varphi(xy)=\varphi(y)$, такво да е точна релацијата* (10).

Доказ. Ако ставиме $(\forall x)\,\varphi(x)=x''+x''$ [1], ќе добиеме

[1] Со M″ е означено некое десно редуцирано множество, а со $x'', y'', \ldots$ неговите елементи.

$$(\forall x,y)\ x+y=x+yy''=x\,(y+y'')=x\,(y(y''+y''))$$
$$=x\cdot y\varphi(y),$$

т. е. точноста на (10).

Теорема 1.16 Нека групоидот $(M,\cdot)$ е лево и десно редуцибилен. *На секоја операција „+“ лево комутативна со „·“ ѝ кореспондира едно пресликување φ со особината (9), за кое е точна релацијата (10).*

Доказ. Нека „+“ е лево комутативна со „·“; спрема 1.15, постои пресликување φ со особината $(\forall x,y)\,\varphi(xy)=\varphi(y)$, и поврзано со операциите „·“ и „+“ преку релацијата (10); поради левата редуцибилност, имаме

$$(\forall x,y)\ \ xy\cdot\varphi(y)=(x'x\cdot y)\,\varphi(y)=(x'\cdot xy)\,\varphi(xy)$$
$$=x'(xy\cdot\varphi(xy))=x'+xy$$
$$=x'(x+y)=x'(x\cdot y\varphi(y))$$
$$=x'x\cdot y\varphi(y)=x\cdot y\varphi(y),$$

а од тоа следува дека φ ја задоволува и релацијата (9). Со тоа е докажана точноста на 1.16.

Забелешка 1.17 Во случај кога $(M,\cdot)$ е десно редуцибилна полугрупа, од 1.14 и 1.15 следува дека определувањето на сите операции лево комутативни со „·“ е еквивалентно со определувањето на сите еднозначни пресликувања φ со особината $(\forall x,y)\,\varphi(xy)=\varphi(y)$. Ако M'' е едно десно редуцирано множество, а ψ еднозначно пресликување од M'' во М, ставувајќи $(\forall x)\,\varphi(x)=\psi(x'')$, добиваме едно пресликување φ со спомнатата особина; на тој начин се определуваат и сите десни транслации на полугрупата (да се види на пример, [7] стр. 23).

Забелешка 1.18 Ако операциите „·“ и „+“ се меѓусебе десно комутативни, лесно се покажува дека нивните дуални операции „·*“ и „+*“ се меѓусебе лево комутативни. Од тоа следува дека сите резултати за левата комутавивност можат да се пренесат на соодветни резултати за десната комутативност, ако секаде „левите“ поими се заменат со соодветни „десни“, а и обратно.

Сега ќе се задржиме на релацијата за комутативност.

Лема 1.19 Ако φ е едноморфизам на групоидот $(M,\cdot)$, *операцијата „+“ определена со* (6) *е комутативна со „·“.*

Доказ.

$$(\forall x,y)\ x+y=\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)\ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ (\forall u,v,x,y)\ \ (u+v)\,(x+y)=\varphi(uv)\,\varphi(xy)=\varphi(uv\cdot xy)$$
$$=uv+xy\qquad\rightarrow$$
$$\rightarrow\qquad \text{„+“}\qquad \text{е комутативна со „·“}.$$

Теорема 1.20 Нека полугрупата има некој лев или десен неутрален елемент. *Постои реципрочно еднозначна коресподенција меѓу ендоморфизмите на полугрупата и операциите комутативни со „·“.*

Доказ. Нека e е лев неутрален елемент на полугрупата $(M,\cdot)$, а „+" операција комутативна со „·"; ако ставиме $(\forall x)\varphi(x)=e+x$, добиваме

$$(\forall x,y)\ x+y=ex+ey=(e+x)(e+y)=\varphi(x)\varphi(y);$$

понатака, од тоа следува

$$(\forall x\ )\ \varphi(e)\varphi(x)=(e+e)(e+x)=ee+ex=e+x=\varphi(x),$$

а конечно и

$$\begin{aligned}(\forall x,y)\ \varphi(xy)&=e+xy=ee+xy\\&=(e+e)(x+y)=\varphi(e)\varphi(x)\varphi(y)\\&=\varphi(x)\varphi(y)\quad ,\end{aligned}$$

т. е. дека φ е ендоморфизам. Очигледно е дека φ е еднозначно определено со „+", а и обратно. При претпоставка дека постои десен неутрален елемент, доказот се изведува на дуален начин.

Од некои слични особини на операциите кои се поврзани со некоја од трите спомнати релации за комутативност, следува и нивната еднаквост. Тоа се гледа на пример од следната

Т е о р е м а 2.21 Ако „+" и „·" се поврзани со некоја од релациите за комутативност, тогаш

$$[(\forall x)(\exists y,z)\ x=yz=y+z]\ \rightarrow\ (\forall u,v)\ uv=u+v.$$

Да ја покажеме точноста, на пример, за случајот кога „+" и „·" се взаемно комутативни.

Нека $u=y_1+z_1=y_1z_1,\ v=y_2+z_2=y_2z_2$; имаме

$$uv=(y_1+z_1)(y_2+z_2)=y_1z_1+y_2z_2=u+v.$$

И во другите два случаи, на ист начин се доаѓа до тој резултат.

З а б е л е ш к а 1.22 . Поради симетричноста на разгледаните релации, фактот што операцијата „+" ја изразуваме со „·", а не обратно, не е битен.

§ 2. Меѓусебно асоцијативни операции

Л е м а 2.1 Нека $(\forall x)\varphi(x)$ е десно асоцијативен елемент на групоидот $(M,\cdot)$. *Операцијата „+" определена со*

$$(11)\ (\forall x,y)\ \ x+y=x\varphi(y)\ ,$$

е десно асоцијативна спрема „·" .

Доказот е очигледен.

Т е о р е м а 2.2 Нека $(M,\cdot)$ е групоид со неутрален елемент. *Постои реципрочно еднозначна коресподенција меѓу операциите десно асоцијативни со „·" и пресликувањата на M во множеството од десно асоцијативните елементи на групоидот.*

Доказ. Нека e е неутралниот елемент на групоидот $(M, \cdot)$.

Ако „+" е десно асоцијативна со „·", од $(\forall x)\varphi(x) = e + x$, следува

$$(\forall x, y)\ x + y = xe + y = x(e + y) = x\varphi(y),$$

а од тоа се добива и

$$(\forall x, y, z)\ x \cdot y\varphi(z) = x(y + z) = xy + z = xy \cdot \varphi(z),$$

т. е. дека $\varphi(z)$ е десно асоцијативен елемент. Ако φ и ψ ја задоволуваат релацијата (11), тогаш

$$(\forall x)\varphi(x) = e\varphi(x) = e\psi(x) = \psi(x) \rightarrow \varphi = \psi.$$

Обратно, спрема 2.1, на секое пресликување φ од спомнатиот облик му кореспондира една операција која е десно асоцијативна спрема „·". Со тоа е докажана точноста на 2.2.

Лемата 2.1 е специјален случај од следната

Лема 2.3 Нека $(\forall x, y)\ x \circ y$ е десно асоцијативен елемент на групоидот $(M, \cdot)$ и нека

(12) $(\forall u, x, y)\ ux \circ y = x \circ y$.

Операцијата „+" определена со

(13) $(\forall x, y)\ x + y = x(x \circ y)$

е десно асоцијативна спрема „·".

Доказот и на ова лема е очигледен.

Ќе го разгледаме сега случајот кога групоидот $(M, \cdot)$ е десно редуцибилен.

Лема 2.4 Ако $(M, \cdot)$ е десно редуцибилен групоид, *на секоја операција „+" десно асоцијативна спрема „·" ѝ кореспондира една операција „∘", таква да се точни релациите* (12) и (13).

Доказ. Нека „+" е десно асоцијативна спрема „·". Ако ставиме $(\forall x, y)\ x \circ y = x'' + y$, поради $(ux)'' = x''$, ќе добиеме дека е точна релацијата (12); понатака, добиваме

$$(\forall x, y)\ x + y = xx'' + y = x(x'' + y) = x(x \circ y),$$

т. е. точноста на (13).

Забелешка 2.5 Нека M'' е едно десно редуцирано множество од групоидот $(M, \cdot)$, а θ едно пресликување од $M'' \times M$ во M. Ако ставиме $(\forall x, y)\ x \circ y = \theta(x'', y)$, добиваме операција со особината (12).

Лесно се покажува точноста и на следната

Лема 2.6. *„·" е лево асоцијативна спрема „+" ако и само ако „·*" е десно асоцијативна спрема „+*".*

Забелешка 2.7 Спрема последната лема, ни во овој случај, не е битен фактот што „+" се изразува со помош на „·", а не обратно. Имено, ако сакаме да направиме обратен постапок, наместо со „·" и „+" ќе работиме со нивните дуални операции.

До крајот на овој дел, ќе претпоставуваме дека $(M,\cdot)$ е полугрупа.

Лема 2·8 Нека операцијата „$\circ$" ја задоволува релацијата

(14) $(\forall u, v, x, y)\, ux \circ y = x \circ yv = xy.$

Операцијата „+" определена со

(15) $(\forall x, y)\, x + y = x(x \circ y)y$

е лево и десно асоцијативна спрема „·".

Теорема 2·9 Нека полугрупата $(M,\cdot)$ е лево и десно редуцибилна. *На секоја операција „+" којашто е лево и десно асоцијативна спрема „·" ѝ кореспондира една операција „$\circ$" таква да се исполнети релациите* (14) и (15).

Точноста на 2·8 и 2·9 може лесно да се докаже и директно, а спрема 2·6 и 2·7, тие следуваат од 2·3 и 2·4. Исто така, лесно се докажува и точноста на следната

Теорема 2·10 Нека „$\circ_1$" и „$\circ_2$" се две операции со особината (14), а „$+_1$" и „$+_2$" соодветните им операции определени со (15). *Операцијата „$+_1$" е лево и десно асоцијативна спрема „$+_2$"; специјално значи,* $(M, +_i)$ *се полугрупи.*

Специјален вид операции со особината (14) се константите, т. е. $(\exists a)\, (\forall x, y)\, x \circ y = a$; во тој случај, (15) добива облик $(\forall x, y)\, x + y = xay$, а операцијата „+" определена на тој начин ќе ја означуваме со „$\dot{a}$".

Обратно, ако полугрупата $(M,\cdot)$ има неутрален елемент, сите операции со особината (14) се константи. Навистина, ако e е неутралниот елемент на полугрупата, ставувајќи $e \circ e = a$, добиваме

$(\forall x, y)\, x \circ y = xe \circ y = e \circ y = e \circ ey = e \circ e = a,$

т. е. дека „$\circ$" е константа. Поради $e \,\dot{a}\, e = a$, ако $a \neq b$, операциите „$\dot{a}$" и „$\dot{b}$" не можат да бидат еднакви. Значи, точна е следната

Теорема 2·11 Нека $(M,\cdot)$ е полугрупа со неутрален елемент. *Множеството операции од облик „$\dot{a}$" го исцрпува множеството од сите операции што се лево и десно асоцијативни спрема „·"; при тоа, $a \neq b \Rightarrow$ „$\dot{a}$" $\neq$ „$\dot{b}$". Секој групоид $(M, \dot{a})$ е полугрупа и „$\dot{a}$" е лево и десно асоцијативна спрема „$\dot{b}$", за секој пар a, b.*

Наредната теорема дава одговор на прашањето кои полугрупи $(M, \dot{a})$ се изоморфни со $(M,\cdot)$.

Теорема 2·12 Нека $(M,\cdot)$ е полугрупа со неутрален елемент e; наредните три пропозиции се еквивалентни.

1°; $(\exists a^{-1})\, aa^{-1} = a^{-1}a = e$; 2°: $(\forall b)(\exists c)\, b = aca$;
3°: *полугрупите* $(M, \cdot)$ *и* $(M, \cdot_a)$ *се изоморфни.*

Доказ. Лесно се добива дека $1° \rightleftarrows 2°$. **Навистина,**

$1° \to (\forall b)\, b = aa^{-1}\, ba^{-1}a \to 2°$;
$2° \to (\exists c)\, e = aca \;\to\; ac = acaca = ca \to$
$\to ac \cdot a = a \cdot ca = e \to 1°$.

Ќе покажеме сега дека $1° \to 3°$.

Нека е точна пропозицијата 1°. Ако ставиме $(\forall x)\, \theta(x) = ax$, од 1° следува $(\forall y)\, y = a\, a^{-1}\, y$, т. е. $(\forall y)(\exists x)\; y = \theta(x)$; исто така,

$$\theta(x) = \theta(y) \to ax = ay \;\to\; x = a^{-1}ax = a^{-1}ay = y;$$

значи добивме дека θ е реципрочно еднозначно пресликување од M на M. Од асоцијативноста на операцијата „$\cdot$" следува и $(\forall x, y)\, \theta(x \cdot_a y) = \theta(x)\, \theta(y)$, а од тоа следува дека полугрупите $(M, \cdot_a)$ и $(M, \cdot)$ се изоморфни, т. е. ја добиваме пропозицијата 3°.

Обратно од 3° следува дека во полугрупата $(M, \cdot_a)$ постои неутрален елемент e' па значи $e = e' \cdot_a e = e \cdot_a e'$, т. е. $e'a = ae' = e$, а од тоа ако се стави $e' = a$, се добива 1°.

Со тоа ја покажавме точноста на теоремата.

Забелешка 2·13 од 3° следува дека секоја операција што е лево и десно асоцијативна спрема „$\cdot$", ги има истите особини и во однос на операцијата „$\cdot_a$".

Забелешка 2·14. Во овој дел на работава имплицитно се содржани и резултатите од работите [1] и [4].

§ 3. Меѓусебно симетрични операции

Лема 3·1 Нека φ_1 и φ_2 се два ендоморфизми на групоидот $(M, \cdot)$, а операцијата „$\cdot$" е симетрична спрема себе, т. е. $(\forall u, v, x, y)\; uv \cdot xy = ux \cdot vy \cdot$ *Операцијата „+" определена со*

(17) $(\forall x\, y)\; x + y = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)$

е симетрична со „$\cdot$".

Доказ. Од (17) и симетричноста на „$\cdot$" спрема себе, следува

$$(\forall u, v, x, y)\; (u + v)\;(x + y) = \varphi_1(u)\,\varphi_2(v) \cdot \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$$

$$= \varphi_1(u)\,\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(v)\,\varphi_2(y)$$

– бидејќи φ_i се ендоморф. — $= \varphi_1(yx)\,\varphi_2(vy)$

$$= \quad ux + vy,$$

т. е. дека „+" е симетрична спрема „$\cdot$".

Лема 3·2 Нека $(M,\cdot)$ е полугрупа, а φ_1 и φ_2 два едноморфизми на таа полугрупа со особината

(18) $(\forall x, y)\, \varphi_1(x)\varphi_2(y) = \varphi_2(y)\varphi_1(x)$.

Операцијата „+” определена со (17) е симетрична спрема „·”.

Доказот се изведува лесно користејќи ги релациите (17) и (18) и фактот што $(M,\cdot)$ е полугрупа.

Лема 3·3 Нека во групоидот $(M,\cdot)$ постои неутрален елемент. *На секоја операција „+” симетрична со „·” ѝ кореспондира еден пар едноморфизми φ_1, φ_2 на групоидот $(M,\cdot)$, такви да се точни релациите (17) и (18). Ако во групоидот $(M,\cdot)$ не постојат идемпотентни елементи различни од неутралниот, ендоморфизмите* φ_1 и φ_2 *се еднозначно определени со операцијата „+”.*

Доказ. Нека e е неутралниот елемент во $(M,\cdot)$, а „+” симетрична операција со „·”. Ако ставиме

(19) $(\forall x)\, \varphi_1(x) = x + e,\ \varphi_2(x) = e + x$,

добиваме

$$(\forall x, y)\ x + y = xe + ey = (x+e)(e+y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$$
$$= ex + ye = (e+y)(x+e) = \varphi_2(y)\varphi_1(x),$$

а од тоа следуваат (17) и (18).

Ќе покажеме сега дека φ_1 и φ_2 се ендоморфизми. Навистина, од (19) следува

$$(\forall x,y)\ \varphi_1(xy) = xy + e = xy + ee$$
$$= (x+e)(y+e) = \varphi_1(x)\varphi_1(y),$$
$$\varphi_2(xy) = e + xy = ee + xy$$
$$= (e+x)(e+y) = \varphi_2(x)\varphi_2(y).$$

Од (19) исто така, следува и дека $\varphi_1(e) = e + e = \varphi_2(e)$, а од тоа се добива и

$$e + e = \varphi_1(e)\varphi_2(e) = (e+e)(e+e),$$

т. е. дека $e+e$ е идемпотентен елемент во $(M,\cdot)$. При претпоставка дека e е единствениот идемпотентен елемент, ќе имаме значи $e+e=e$, т. е. $\varphi_1(e) = \varphi_2(e) = e$. Од тоа лесно се добива дека не постојат два различни парови ендоморфизми кои ја задоволуваат релацијата (17), при дадена операција „+” симетрична со „·”.

Од лемите 3·2 и 3·3 следува следната

Теорема 3·4 Нека $(M,\cdot)$ е комутативна полугрупа со неутрален елемент којшто е единствениот идемпотент во полугрупата. *Постои реципрочно еднозначна коресподенција меѓу паровите ендоморфизми на полугрупата $(M,\cdot)$ и операциите симетрични со „·”.*

И кај оваа релација, некои слични особини на операците „$\cdot$" и „$+$" кои се меѓусебе симетрични, повлекуваат еднаквост на тие операции; тоа се гледа од наредната теорема.

Теорема 3·5 Нека секој од групоидите $(M,\cdot)$ и $(M,+)$ има неутрален елемент. *Ако операциите „$\cdot$" и „$+$" се меѓусебе симетрични, тогаш тие се и еднакви; во тој случај, $(M,\cdot)$ е комутативна полугрупа.*

Доказ. Нека o е неутралниот елемент на $(M,+)$, а e на $(M,\cdot)$. Од взаемната симетричност на „$\cdot$" и „$+$" следува прво

$$o=o+o=oe+eo=(o+e)\ (e+o)=ee=e,$$

а од тоа се добива и

$$(\forall x,y)\ xy=(x+e)\ (e+y)=xe+ey=x+y,$$

т. е. дека „$\cdot$" и „$+$" се еднакви операции.

Натака, од тоа што „$\cdot$" е симетрична спрема себе, добиваме

$$\begin{aligned}(\forall x,y,z)\ xy\cdot z&=xy\cdot ez=xe\cdot yz=x\cdot yz\\ xy&=ex\cdot ye=ey\cdot xe=x\cdot yz,\end{aligned}$$

т. е. дека $(M,\cdot)$ комутативна полугрупа, а со тоа точноста на теоремата е докажана.

Забелешка 3.6 Вториот дел на последната теорема е еден резултат од работата [5] (стр. 706); истиот тој резултат е следствие и на еден поопшт став од работата [2] (стр. 36).

Теорема 3.7 Нека $(M,\cdot)$ е полугрупа со неутрален елемент. Полугрупата $(M,\cdot)$ *е комутативна, ако и само ако постои операција „$+$" симетрично со „$\cdot$" за која е точна релацијата*

$$(20)\ (\forall x)\ (\exists u,v)\ u+e=e+v=x,$$

каде e е неутралниот елемент на полугрупата $(M,\cdot)$.

Доказ. Ако $(M,\cdot)$ е комутативна полугрупа, тогаш операцијата „$\cdot$" е симетрична спрема себе, а очигледно ако се стави „$\cdot$" = „$+$" и $x=u=v$ релацијата (20) ќе биде исполнета.

Обратно, нека „$+$" е симетрична операција спрема „$\cdot$" со особината (20). Имаме значи

$$(\forall x,y)\ (\exists u,v)\ u+e=x,\ e+v=y,$$

а од тоа следува

$$\begin{aligned}xy&=(u+e)\ (e+v)=ue+ev=u+v\\ &=eu+ve=(e+v)\ (u+e)\\ &=yx\ ,\end{aligned}$$

т. е. дека $(M,\cdot)$ е комутативна полугрупа, а со што точноста на теоремата е докажана.

Нека $(M, \cdot)$ е еден групоид, а со $\prod_{1}^{n} x_i$ означен било кој производ на елементите $x_1, x_2, \ldots x_m$, така да секој од нив се јавува само еднаш како фактор. Попрецизно, тој производ се определува на следниот начин: ако $n > 1$, постои природен број r помал од n и производи

$$\prod_{1}^{p} x_i,\ \prod_{p+1}^{n} x_i \text{ така да } \prod_{1}^{n} x_i = \prod_{1}^{p} x_i \cdot \prod_{p+1}^{n} x_i;$$

за $n = 1$, пишуваме $\prod_{1}^{1} x_i = x_1$. Аналогно се определува $\sum_{1}^{m}$ со помош на некоја друга бинарна операција „+".

Т е о р е м а 3.8. Ако „·" и „+" се две меѓусебно симетрични операции, точен е идентитетот

$$(20)\quad \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n} x_{ij}\right)$$

за било кој производ $\prod_{1}^{n}$ и збир $\sum_{1}^{m}$.

Доказ. Доказот го изведуваме индуктивно. За $n = 1$ или $m = 1$ точноста на (20) е очигледна; за $n = m = 2$, (20) добива облик

$$(x_{11} + x_{12})\,(x_{21} + x_{22}) = x_{11}\,x_{21} + x_{12}\,x_{22},$$

а тоа, спрема (5), е точно по претпоставка.

За $n = 2$, $m > 2$ ако $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{p} x_{ij} + \sum_{j=p+1}^{m} x_{ij}$, имаме

$$\prod_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right) = \left(\sum_{j=1}^{p} x_{1j} + \sum_{j=p+1}^{m} x_{1j}\right)\left(\sum_{j=1}^{p} x_{2j} + \sum_{j=p+1}^{m} x_{2j}\right)$$

$$= \sum_{1}^{p} x_{1j} \sum_{1}^{p} x_{2j} + \sum_{p+1}^{m} x_{1j} \sum_{p+1}^{m} x_{2j}$$

$$= \sum_{1}^{p} x_{1j}\, x_{2j} + \sum_{p+1}^{m} x_{1j}\, x_{2j}$$

$$= \sum_{1}^{m} x_{1j}\, x_{2j} = \sum_{j=1}^{m} \Big(\prod_{i=1}^{2} x_{ij} \Big),$$

па значи, ако $n = 2$ (20) е точно за било кое m.

За $n > 2$, $m > 2$ ако е $\prod\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = \prod\limits_{i=1}^{q} x_{ij} \cdot \prod\limits_{i=q+1}^{n} x_{ij}$, имаме

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\Big) = \prod_{i=1}^{q}\Big(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\Big) \cdot \prod_{i=q+1}^{q}\Big(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\Big(\prod_{i=1}^{q} x_{ij}\Big) \cdot \sum_{j=1}^{m}\Big(\prod_{i=q+1}^{n} x_{ij}\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\Big(\prod_{i=1}^{q} x_{ij} \cdot \prod_{i=q+1}^{n} x_{ij}\Big) = \sum_{j=1}^{m}\Big(\prod_{i=1}^{n} x_{ij}\Big).$$

Со тоа е покажана општата точност на (20).

З а б е л е ш к а, 3.9 Ако $(M, \cdot)$ е полугрупа изразот $\prod\limits_{1}^{n} x_i$ е еднозначно определен од $x_1, x_2 \cdots x_n$, но во општ случај тој може да прими повеќе и тоа најмногу $\dfrac{(2n-2)!}{n!\ (n-1)!}$ вредности; да се види на пример, ([6] стр. 19). Со оглед на таа можна многозначност, $\prod\limits_{1}^{n} x_i$ треба да се третира како производ со определена структура, определена со распоредот на заградите; на пример ако

$$\sum_{1}^{3} x_i = (x_1 + x_2) + x_3 \quad \text{и} \quad \prod_{1}^{4} y_i = y_1\, y_2 \cdot y_3\, y_4$$

идентитетот (20) добива облик

$$[(x_{11} + x_{12}) + x_{13}]\,[(x_{21} + x_{22}) + x_{23}] \cdot [(x_{31} + x_{32}) + x_{33}]\,[(x_{41} + x_{42}) + x_{43}] =$$
$$= (x_{11}\, x_{21} \cdot x_{31}\, x_{41} + x_{12}\, x_{22} \cdot x_{32}\, x_{42}) + x_{13}\, x_{23} \cdot x_{33}\, x_{43},$$

§ 4. Неколку други релации

Како што спомнавме во § 1 и § 2, ако наместо со „·" и „+" се работи со нивните дуални операции, релациите за десна комутативност и асоцијативност можат да се сведат на соодветните релации за лева комутативност односно асоцијативност. Истото може да се направи и со релациите определени со следните идентитети:

(21) $(\forall x, y, z)\ x(y+z) = zy + x$

(22) $(x+y)z = z + yx$

(23) $x(y+z) = y + xz$

(24) $(\forall u, v, x, y)\ (u+v)\ (x+y) = yx + vu.$

Навистина, од (21) односно (22) следува дека „·", „+*" односно „·*", „+" се меѓусебе лево комутативни; од (24) следува дека „·*" и „+" се шеѓусебе комутативни, а од (23) дека „·" е лево асоцијативна спрема „+*". Значи, добиените резултати во § 1 и § 2 можат лесно да се пренесат и на тие нови четири релации.

Се разбира, може да се изучуваат и некои други релации. Овде ќе спомeнеме уште четири нови релации кои се определуваат со идентитетите:

(25) $(\forall x, y, z)\ x + yz = (x+y)\ (y+z)$

(26) $= xy + z$

(27) $(\forall u, v, x, y)\ (u+v)\ (x+y) = vu + xy.$

(28) $= xu + vy.$

Нека претпоставиме дека $(M,\cdot)$ е група; неутралниот елемент, како и досега, го означуваме со e.

Од (25), ако ставиме $(\forall x)\varphi(x) = e + x$, добиваме

$$(\forall x, y)\, x + y = x + ye = (x+y)\ (y+e) \to y + e = e \to$$
$$\to x + y = x + ey = (x+e)\ (e+y)$$
$$= e + y = \varphi(y)\,,$$
$$\varphi(xy) = e + xy = (e+x)\ (e+y) = \varphi(x)\varphi(y),$$

т. е. дека φ е едноморфизам, а „+" е определена со

(29) $(\forall x, y)\ x + y = \varphi(y).$

Обратно, ако φ е ендоморфизам на групата $(M,\cdot)$, операцијата определена со (29) ја задоволува релацијата (25).

Од (26), ако ставиме $(\forall x)\varphi(x) = x + e$, добиваме

(30) $(\forall x, y)\, x + y = xy + e = \varphi(xy).$

Обратно, ако φ е некое еднозначно пресликување од M во M, операцијата „+" определена со (30) ја задоволува релацијата (26).

Од (27) следува

$$e + e = ee + ee = (e+e)\ (e+e) \to e + e = e \to$$
$$\to (\forall x)\, x + e = xe + ee = (e+x)\ (e+e) = e + x \to$$

$$\to (\forall x, y)\, x+y = (x+y)\,(e+e) = y\,x + e = e + y\,x$$
$$= (e+e)\,(y+x) = y+x,$$

т. е. дека $(M,+)$ е комутативен групоид; во тој случај пак, очигледно е дека „·“ и „+“ се меѓусебе комутативни.

Аналогно се покажува дека и од (28) следува комутатиенсста на групоидот $(M,+)$, а во тој случај, „·“ и „+“ се меѓусебе симетрични.

Од сето тоа, следува дека за добивање резултати кои се стриктно поврзани со релациите определени погоре, нужно е да се внесат поопшти претпоставки од тоа $(M,\cdot)$ да е група.

§ 5 Примери

Пример 5·1 Нека $M=\{a,b,c\}$, а операцијата „·“ определена со:

1:°

·	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	a	b

;

2°:

·	a	b	c
a	a	b	a
b	b	a	c
c	c	a	b

;

3°:

·	a	b	c
a	a	b	c
b	c	a	a
c	c	a	a

Лесно се покажува дека во првите два случаи не постои операција „+“ комутативна со „·“, а различна од неа. Во третиот случај, елементите a и c се десно асоцијативни, па затоа операциите „$\cdot a$“ и „$\cdot c$“ определени со шемите

·a	a	b	c
a	a	c	c
b	c	a	a
c	c	a	a

·c	a	b	c
a	c	a	a
b	a	c	c
c	a	c	c

се лево комутативни со „·“; тие се и единствените операции со таа особина.

Пример 5·2 Нека $M=\{a,b,c,d\}$, а $(M,\cdot)$ определен со шемата

·	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	a	b	c	d
c	c	d	a	b
d	c	d	a	b

Лесно се покажува дека тој групоид е полугрупа (да се види на пример, [3] стр. 149). Од шемата е очигледно дека таа полугрупа е десно редуцибилна, со десно редуцирано множество $M''=\{a,b\}$ и $c''=a$, $d''=b$. Спрема 1·17, на секое пресликување ψ од M'' во M му кореспондира една операција „+“ лево комутативна со „·“, а и обратно. Такви пресликувања има 16 и тоа:

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}	ψ_{16}
a	a	a	a	a	b	b	b	b	c	c	c	c	d	d	d	d
b	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d.

Od нив, ако се стави $(\forall x, y)\, x+y = xy\psi(y'')$, лесно се добиваат соодветните 16 операции лево комутативни со „·“. Тие операции се определени со следните шеми:

$+_1$	a	b	c	d
a	a	a	c	c
b	a	a	c	c
c	c	c	a	a
d	c	c	a	a

$+_2$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	a	b	c	d
c	c	d	a	b
d	c	d	a	b

$+_3$	a	b	c	d
a	a	c	c	a
b	a	c	c	a
c	c	a	a	c
d	c	a	a	c

$+_4$	a	b	c	d
a	a	d	c	b
b	a	d	c	b
c	c	b	a	d
d	c	b	a	d

$+_5$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	b	a	d	c
c	d	c	b	a
d	d	c	b	a

$+_6$	a	b	c	d
a	b	b	d	d
b	b	b	d	d
c	d	d	b	b
b	d	d	b	b

$+_7$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	b	c	d	a
c	d	a	b	c
d	d	a	b	c

$+_8$	a	b	c	d
a	b	d	d	b
b	b	d	d	b
c	d	b	b	d
d	d	b	b	d

$+_9$	a	b	c	d
a	c	a	a	c
b	c	a	a	c
c	a	c	c	a
d	a	c	c	a

$+_{10}$	a	b	c	d
a	c	b	a	d
b	c	b	a	d
c	a	d	c	b
d	a	d	c	b

$+_{11}$	a	b	c	d
a	c	c	a	a
b	c	c	a	a
c	a	a	c	c
d	a	a	c	c

$+_{12}$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	c	d	a	b
c	a	b	c	d
d	a	b	c	d

$+_{13}$	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	d	a	b	c
c	b	c	d	a
d	b	c	d	a

$+_{14}$	a	b	c	d
a	d	b	b	d
b	d	b	b	d
c	b	d	d	b
d	b	d	d	b

$+_{15}$	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	d	c	b	a
c	b	a	d	c
d	b	a	d	c

$+_{16}$	a	b	c	d
a	d	d	b	b
b	d	d	b	b
c	b	b	d	d
d	b	b	d	d.

Со оглед на тоа што полугрупата $(M, \cdot)$ има и лев неутрален елемент (на пример a), таа е и лево редуцибилна. Од тоа следува (спрема 2·9) дека секоја операција „+“ која е лево и десно асоцијативна спрема „·“ е од облик (15), а операцијата „$\circ$" може сега да се претстави со едно од горе спомнатите 16 пресликувања ψ_i; навистина, спрема (14) имаме

$$(\forall x, y)\, x \circ y = x \circ a\, y = x \circ a = x x'' \circ a = x'' \circ a = \psi(x'').$$

Значи, ако ставиме

$$(\forall x, y)\, x + y = x\, \psi(x'')\, y,$$

ќе ги добиеме сите операции кои се лево и десно асоцијативни спрема „$\cdot$". Лесно се утврдува дека само четири различни операции се добиваат, а тоа се операциите „$+_2$", „$+_4$", „$+_{10}$" и „$+_{12}$".

Природно е да се постави прашањето: дали може да се реализира *мрежаста структура*[1]) кај која операциите $\cup$ и $\cap$ се поврзани со некоја од спомнатите релации?. Лесно може да се покаже дeко тоа не е можно ако таа мрежаста структура има повеќе од еден елемент. Тој факт наложува да се разгледуваат структури каде се исполнети послаби релации од спомнатите во оваа работа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] V. DEVIDÉ, Einige Eigenschaften von Gruppen in welchen mehrere Operationen definiert sind, Glasnik mat. fiz. astr. T. 4 (1949) 97—103.

[2] ——————, Einige Beziehungen der Komutativitäts und der Assoziativitätseigenschaft, Glasnik mat. fiz. astr. T. 6 (1951) 33—48.

[3] P. DUBREIL, Algèbre, Cahiers scient. fasc. 20, Paris 1954.

[4] D. ELLIS, Cross-Associativity and Essential Similarity, Amer. Math. Monthly v. 60 (1953) 545—546.

[5] O. FRINK, Simmetric and Self-Distributive Systems, Amer. Math. Monthly v. 62 (1955) 697—707.

[6] N. JACOBSON, Lectures in Abstract Algebra, vol. I, New York 1951.

[7] Ѓ. ЧУПОНА, За редуцибилните полугрупи, Год. зборн. Фил. фак. Скопје, кн. 11 (1958), 19—27.

Summary

ON SOME RELATIONS BETWEEN BINARY OPERATIONS

G. Čupona

1. Let „$\cdot$" and „$+$" be two binary operations on the set S. If

(1) $(\forall u, v, x, y)\ u(x+y) = u + xy,$

(2) $\qquad\qquad\qquad = ux + y,$

(3) $\qquad (u+v)\ (x+y) = uv + xy,$

(4) $\qquad\qquad\qquad = ux + vy,$

[1]) Овој поим се употребува во смисол на Lattice, т. е. Verband.

we say, respectively, that „$\cdot$" is *left commutative* (l. c.) — *left associative* (l. a), *commutative* (c.), *simmetric* (s.) — respect to „$+$".

It is evident that „l. c.", „c." and „s". are simmetric binary relations; the relations „l. c." and „c." are reflexive, but „s" is not reflexive one; „l. a." is not reflexive either simmetric.

At first, we shall give some prelimminary definitions. The element $a \in S$ is *left associative* in the *groupoid* $(S, \cdot)$ if

(5) $(\forall x, y)\ a \cdot xy = ax \cdot y$.

$(S, \cdot)$ is a *left reducible* groupoid if there exists a subset S' of left associative elements such that the mapping „$'$" defined by

(6) $(\forall x)\, x' \in S' \rightleftarrows x'x = x$,

is a single-valued function of the set S upon S'; we say that S' is a left reduced set. The unary operation (on the set S) φ is a *left translation* of the groupoid $(S, \cdot)$ if

(7) $(\forall x, y)\, \varphi\,(x\,y) = \varphi(x)\, y$.

$(S, \cdot^*)$ is dual groupoid of $(S, \cdot)$ if $(\forall x, y)\ x * y = yx$. We say that $(S, \cdot)$ has some „*right*" property, if $(S, \cdot^*)$ has the corresponding „*left*" one.

2. The main results

A. Let a be a right associative element in $(S, \cdot)$. If

(8) $(\forall x, y)\ x \cdot_a y = xy \cdot a$,

then „$\cdot$" l. c. „$\cdot_a$". Converselly, if $(S, \cdot)$ has an identity e (i. e. $(\forall x)\ ex = xe = x$), and „$\cdot$" l. c. „$+$", then „$+$"$=$„$\cdot_a$", where $a = e + e$ is a right associative element of $(S, \cdot)$; „$\cdot_a$"$=$„b"$\to a = b$.

More generally, if φ is a right translation of $(S, \cdot)$ and

(9) $(\forall x, y)\ x \dot{\varphi} y = \varphi(xy)$,

then „$\cdot$" l. c. „$\dot{\varphi}$". Converselly ,let $(S, \cdot)$ be left reducible, or idempotent with some left cancelable element (i. e. $(\forall x)\ xx = x$ and $(\exists a)\ (\forall x, y)\ ax = ay \to x = y$); from „$\cdot$" l. c. „$+$" it follows „$+$"$=$„$\dot{\varphi}$", where $(\forall x)\, \varphi\,(x) = x' + x$ in the first case, and $(\forall x)\ \varphi\ (x) = x + x$ in the second one; in these cases we have „$\dot{\varphi}$"$=$„$\dot{\psi}$"$\to \varphi = \psi$.

Let $(S, \cdot)$ be a group. We have:

$\{$„$\cdot$" l. c „$+$"$\rightleftarrows$„$\cdot_a$" l. c. „$+$"$\} \rightleftarrows (\forall x)\ xa = ax$;

then $(S, \cdot)$ and $(S, \cdot_a)$ are isomorphic.

B. If φ is an endomorphism of $(S, \cdot)$ then „$\cdot$" c. „$\dot{\varphi}$". Converselly, if $(S, \cdot)$ is a semigroup with a left (or right) identity e, from „$\cdot$" l. c. „$+$" it fololws „$+$"$=$„$\dot{\varphi}$", where $(\forall x)\, \varphi\,(x) = e + x$ (or $(\forall x)\, \varphi\,(x) = x + e$); then φ is an endomorphism of $(S, \cdot)$ and „$\dot{\varphi}$"$=$„$\dot{\psi}$"$\to \varphi = \psi$.

If „ · " l. c. „ + " or „ · " c. „ + " then

$\{(\forall x)(\exists y, z)\, x = yz = y + z\} \rightarrow$ „ · " = „ + ".

C. Let $(\forall x)\, \varphi(x)$ is a right associative element in $(S, \cdot)$. From

(10) $(\forall x, y)\, x \cdot \varphi y = x \varphi(y)$,

it follows „ · " l. a. „ $\cdot\varphi$". Converselly, if $(S, \cdot)$ has an identity e, from „ · " l. a. „ + " it follows „ + " = „ $\cdot\varphi$ ", where $(\forall x)\, \varphi(x) = e + x$ is a right associative element in $(S, \cdot)$.

More generally, let „ o " be a binary operation on S such that

(11) $(\forall u, x, y)\, ux \circ y = x \circ y$.

If

(12) $(\forall x, y)\, x + y = x(x \circ y)$,

then „ · " l. a. „ + ". Converselly, if $(S, \cdot)$ is a right reducible groupoid and „ · " l. a. „ + " then there exists a binary operation „ o " such that (11) and (12) are satisfied.

D. Let $(S, \cdot)$ be a semigroup.

If the binary operation „ o " satisfies the relation

(13) $(\forall u, v, x, y)\, u x \circ y = x \circ yv = xy$,

and „ + " is defined by

(14) $(\forall x, y)\, x + y = x(x \circ y) y$,

then „ · " l. a. „ + ", „ + " l. a. „ · ", and $(S, +)$ is a semigroup. If both „ $\circ_1$ " and „ $\circ_2$ " satisfy (13) and „ $+_1$ ", „ $+_2$ " are theirs corresponding operations by (14), then „ $+_1$ " l. a. „ $+_2$ " and „ $+_2$ " l. a. „ $+_1$ ". Converselly, if the semigroup $(S, \cdot)$ is reducible both left and right, from „ · " l. a. „ + ", „ + " l. a. „ · " it follows that there exists an operation „ o " such that (13) and (14) are satisfied.

If „ o " is a constant a, i. e. $(\forall x, y)\, x \circ y = a$, (13) is satisfied; hence it follows „ · " l. a. „ $\dot{a}$ " and „ $\dot{a}$ " l. a. „ · ", where

(15) $(\forall x, y)\, x \dot{a}\, y = x a y$.

Converselly, let the semigroup $(S, \cdot)$ has an identity e. From „ · " l. a. „ + ", and „ + " l. a. „ · " it follows „ + " = „ $\dot{a}$ ", where $e + e = a$. In this case we have

$\{[$„ · " l. a. „ + ", „ + " l. a. „ · "$] \rightleftarrows [$„ $\dot{a}$ " l. a. „ + ", „ + " l. a. „ $\dot{a}$ "$]\} \rightleftarrows$

$\rightleftarrows \{(\forall x)(\exists y)\, x = aya\} \rightleftarrows \{(\exists a)\, aa' = a'a = e\} \rightleftarrows$

$\rightleftarrows$ {The semigroups $(S, \cdot)$ and $(S, \dot{a})$ are isomorphic}.

E. Let φ and ψ be two endomorphisms of $(S, \cdot)$ and

(16) $(\forall x, y)\ x\,\varphi \cdot \psi\, y = \varphi(x)\psi(y)$.

We have

„$\cdot$" s. „$\cdot$" $\rightarrow$ „$\cdot$" s. „$\varphi \cdot \psi$",

and

[„$\cdot$" l. a. „$\cdot$", „$\varphi \cdot \psi$" = „$\varphi \cdot * \psi$"] $\rightarrow$ „$\cdot$" s. „$\varphi \cdot \psi$".

Conversely, if $(S, \cdot)$ has an identity e, from „$\cdot$" s. „$+$" it follows „$+$" = „$\varphi \cdot \psi$" = „$\varphi \cdot * \psi$", where φ and ψ are two endomorphisms of $(S, \cdot)$ defined by $(\forall x)\, \varphi(x) = e + x$, $\psi(x) = x + e$; if there is not idempotent elements $(\neq e)$ in $(S, \cdot)$, the corresponding pair of endomorphisms φ, ψ are uniquelly determined by „$+$", i. e.

„$\varphi \cdot \psi$" = „$\xi \cdot \eta$" $\rightarrow \varphi = \xi,\ \psi = \eta$.

Let e, o be the identity element of $(S, \cdot)$ and $(S, +)$ respectively. From „$\cdot$" s. „$+$" it follows „$\cdot$" = „$+$"; in this case $(S, \cdot)\ (= (S, +))$ is a commutative semigroup.

A semigroup with identity e is commutative if and only if there exists an operation „$+$" such that „$\cdot$" s. „$+$" and $(\forall x)(\exists u, v)\ u + e = e + v = x$.

F. Let $\prod\limits_{r}^{r} x_r = \sum\limits_{r}^{r} x_r = x_r$ and $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right\}$ be an arbitrary product (sum) of the elements $x_1, x_2, \cdots x_n \in S$. We have

$$„\cdot\text{" s. „}+\text{"} \rightarrow (\forall x_{i,j}) \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \Big) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\prod_{i=1}^{n} x_{ij} \Big).$$

3. Some notes

A. The fact that we have supposed some known properties of the groupoid $(S, \cdot)$, and not of $(S, +)$, is not essential, because „l. c.", „c." and „s." are simetric relations, and „$\cdot$" l. a. „$+$" $\rightleftarrows$ „$+ *$" l. a. „$\cdot *$".

B. The all results which we have got above can be transfered to five other relations:

(17) $(\forall u, v, x, y)\ u(x + y) = yx + u$

(18) $\qquad = x + uy$

(19) $\qquad (u + x)y = y + xu$

(20) $\qquad = ux + y$

(21) $\qquad (u + v)(x + y) = yx + vu.$

Namely, it is evident that

(17) $\rightleftarrows$ „$\cdot$" l. c. „$+*$"; (18) $\rightleftarrows$ „$\cdot$" l. a. „$+*$";

(19) $\rightleftarrows$ „$\cdot *$" l. c. „$+$"; (20) $\rightleftarrows$ „$\cdot *$" l. c. „$+*$";

(21) $\rightleftarrows$ „$\cdot$" c. „$+*$".

C. With the identities:

$$(22)\quad (\forall u, v, x, y)\ x + yz = (x+y)(y+z)$$

$$(23)\quad = xy + z$$

$$(24)\quad (u+v)(x+y) = xu + vy$$

$$(25)\quad = vu + xy,$$

are defined four new relations.

Let $(S, \cdot)$ be a group. We have:

(22) $\rightleftarrows \{(\exists \varphi)(\forall x, y)\ x + y = \varphi(y),\ \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)\}$;

(23) $\rightleftarrows \{(\exists \varphi)(\forall x, y)\ x + y = \varphi(xy)\}$;

(24) $\rightleftarrows \{(\forall x, y)\ x + y = y + x,$ „$\cdot$" s. „$+$"$\}$;

(25) $\rightleftarrows \{(\forall x, y)\ x + y = y + x,$ „$\cdot$" c. „$+$"$\}$.