ЗА ТЕРНАРНИТЕ АСОЦИЈАТИВНИ ОПЕРАЦИИ

Ѓ. Чупона

Во ова работа ќе разгледаме некои тернарни операции, а поголем дел од резултатите можат лесно да се обопштат за случај на произволни финитарни операции.

О. Ознаки и дефиниции

0.1 Нека R и S се две пропозиции. $R \Rightarrow S$ се пишува наместо „од точноста на R следува точноста на S"; $R \Leftrightarrow S$, наместо „$R \Rightarrow S$ и $S \Rightarrow R$", т. е. наместо „R и S се еквивалентни".

0.2 Нека M е некое множество.
„$(\forall x \in M)$", односно „$(\exists x \in M)$", односно „$(\exists ! x \in M$" се пишува наместо „за секој елемент x од M", односно „постои некој елемент x од M", односно „постои еден и само еден елемент x од M".

0.3 [A *е* n-арна операција во M] $\Leftrightarrow$ $[(\forall x_1, x_2, \ldots x_n \in M)$ $(\exists ! y \in M)$ $y = A(x_1, x_2, \ldots x_n)]$.

Во специјален случај кога $n = 1, 2, 3$ велиме дека операцијата е унарна, бинарна, тернарна.

0.4 Нека A е n-арна, а B m-арна операција во некое множество M.

[A е примитивна операција за B] $\Leftrightarrow$ [B е индуцирана операција за A] $\Leftrightarrow$ $\{[m = 1 \Rightarrow (\forall x \in M)\ B(x) = x]$ и $[m > 1 \Rightarrow$ $(\exists B_1 B_2 \ldots B_n)$ B_i е m_i -арна индуцирана операција од A и $(\forall x_1, x_2, \ldots x_m)\ B(x_1, x_2, \ldots x_m) = A(B_1(x_1 \ldots x_{m_1}) \ldots B_n(\ldots x_m))]\}$.

Лесно се покажува дека m треба да биде од облик $k(n-1)+1$, каде k е природен број.

0.5 1°: [Низата $(e_1, e_2, \ldots e_{n-1})$ е i -n[1]. за A] $\Leftrightarrow$ $[(\forall x \in M)\ A(e_1, \ldots e_{i-1}, x, e_i \ldots e_{n-1}) = x]$

2°: [елементот e е $i - n$ за A] $\Leftrightarrow$ [$(e\, e \ldots e)$ е $i - n.$ за A]

3°: [e е $n.$ за A] $\Leftrightarrow$ [$i \leqslant n \Rightarrow e$ е $i - n.$ за A].

Во текот на натамошната работа претпоставуваме дека A е тернарна операција, а при тоа обично, наместо $A(x\,y\,z)$ ќе пишуваме $x\,y\,z$.

---

[1]) $n.$ се пишува наместо „неутрална".

0.6 [A е асоцијативна] $\Leftrightarrow$ $[(\forall\, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\,(x_1\, x_2\, x_3)\, x_4\, x_5$
$= x_1\,(x_2\, x_3\, x_4)\, x_5 = x_1\, x_2\,(x_3\, x_4\, x_5)]$.

Лесно се покажува дека ако A е асоцијативна, за секој природен број k постои само една $2k+1$ -арна операција B која е индуцирана од A. Наместо $B\,(x_1, x_2, \ldots x_{2k}, x_{2k+1})$ ќе пишуваме $x_1\, x_2 \ldots x_{2k}\, x_{2k+1}$.

1. Асоцијативни операции со неутрални парови

Целта на овој дел е да ја докажеме следната теорема

Теорема 1.1 (1° и 2°) $\Rightarrow$ (3°, 4°, 5° и 6°), каде

1°: A е асоцијативна; 2°: $(e_1\, e_2)$ е $2-n.$

3°: $(e_1\, e_2)$ и $(e_2\, e_1)$ се $i-n.$ каде $i = 1, 2, 3$

4°: $(\forall\, x, y \in M)\;\; e_i\, x\, y = x\, e_i\, y = x\, y\, e_i$, каде $i = 1, 2$

5°: $[(f_1\, f_2)$ е $1\; - n.]$ $\Leftrightarrow$ $[(f_1\, f_2)$ е $3\; - n.]$

6°: $[x\, \underbrace{e_1\, e_1 \ldots e_1}_{2k} = y]$ $\Leftrightarrow$ $[x = y\, \underbrace{e_2\, e_2 \ldots e_2}_{2k}]$

Доказ. 1° и 2° $\Rightarrow$

$(\forall\, x \in M)\;\; x\, e_1\, e_2 = e_1\,(x\, e_1\, e_2)\, e_2 =$ (спрема 1°) $= e_1\, x\,(e_1\, e_2\, e_2)$
$= e_1\, x\, e_2 = x \;\Rightarrow\; (e_1\, e_2)$ е $1\; - n.$

$x\, e_2\, e_1 = e_1\,(x\, e_2\, e_1)\, e_2 = (e_1\, x\, e_2)\, e_1\, e_2 = x\, e_1\, e_2 = x \;\Rightarrow$
$(e_2\, e_1)$ е $1 - n.$ $\Rightarrow$

$(\forall\, x, y \in M)\;\; e_1\, x\, y = e_1\,(x\, e_2\, e_1)\, y = (e_1\, x\, e_2)\, e_1\, y = x\, e_1\, y = x\, e_1\,(y\, e_2\, e_1)$
$= x\,(e_1\, y\, e_2)\, e_1 = x\, y\, e_1 \;\Rightarrow$

$(\forall\, x \in M)\;\; e_2\, x\, e_1 = e_1\, e_2\, x = e_1\, e_2\,(e_1\, x\, e_2) = (e_1\, e_2\, e_1)\, x\, e_2 = e_1\, x\, e_2$
$= x \;\Rightarrow\; (e_2\, e_1)$ е $2 - n.$ $\Rightarrow$

(ако во досегашната работа e_1 и e_2 ги променат местата)

$(\forall\, x, y \in M)\;\; e_2\, x\; y = x\, e_2\, y = x\, y\, e_2 \;\Rightarrow$

$(\forall\, x \in M)\;\; e_1\;\, e_2\, x = e_2\, e_1\, x = e_1\, x\, e_2 = x \;\Rightarrow\;$ $(e_1\, e_2)$ и $(e_2\, e_1)$ се
$3\; - n.;$ $\Rightarrow$ $[(1°$ и $2°)$ $\Rightarrow$ $(3°$ и $4°)]$.

Сега ќе покажеме дека (1° и 2°) $\Rightarrow$ 5°.

1°, 2° и $(f_1\, f_2)$ е $1 - n.$ $\Rightarrow$

$(\forall\, x \in M)\;\; f_1\, f_2\, x = f_1\, f_2\,(e_1\, e_2\, x) = (f_1\, f_2\, e_1)\;\; e_2\, x = (e_1\, f_1\, f_2)\, e_2\, x =$
$= e_1\, e_2\, x = x \;\Rightarrow\; (f_1\, f_2)$ е $3\; - n.$

1°, 2° и $(f_1\, f_2)$ е $3\; - n.$ $\Rightarrow$

$(\forall\, x \in M)\;\; x\, f_1\, f_2 = (x\, e_1\, e_2)\;\, f_1\, f_2 = x\, e_1\,(e_2\, f_1\, f_2) = x\, e_1\,(f_1\, f_2\, e_2) =$
$= x\, e_1\, e_2 = x \;\Rightarrow\; (f_1 f_2)$ е $1 - n.;$ $\Rightarrow$ (1°, 2°) $\Rightarrow$ 5°.

За да покажеме дека $(1°, 2°) \Rightarrow 6°$ ќе ја докажеме прво релацијата

$$(1.1)\ (1° \text{ и } 2°) \Rightarrow \{[x_1 x_2 \ldots x_{2r} e_1 = y_1 y_2 \ldots y_{2s} e_1] \Leftrightarrow [x_1 x_2 \ldots x_{2r} e_2 = y_1 y_2 \ldots y_{2s} e_2]\}$$

Доказ. $x_1 x_2 \ldots x_{2r} e_1 = y_1 y_2 \ldots y_{2s} e_1 \Rightarrow$

$$x_1 x_2 \ldots x_{2r} e_2 = x_1 x_2 \ldots x_{2r} (e_1 e_2 e_2) = (x_1 x_2 \ldots x_{2r} e_1) e_2 e_2 =$$
$$= (y_1 y_2 \ldots y_{2s} e_1) e_2 e_2 = y_1 y_2 \ldots y_{2s} (e_1 e_2 e_2) = y_1 y_2 \ldots y_{2s} e_2;$$

значи, од првото равенство во (1.1) следува второто; обратното е точно поради симетријата меѓу e_1 и e_2.

Сега лесно се покажува точноста на 6°. Навистина, спрема 3° и 4°, $(1° \text{ и } 2°) \Rightarrow$

$$(\forall y \in M)\ y = y \underbrace{e_1 e_1 \ldots e_1}_{k} \underbrace{e_2 e_2 \ldots e_2}_{k}; \Rightarrow$$

$$[x \underbrace{e_1 e_1 \ldots e_1}_{2k} = y] \Leftrightarrow [x \underbrace{e_1 e_1 \ldots e_1}_{2k} = y \underbrace{e_1 e_1 \ldots e_1}_{k} \underbrace{e_2 e_2 \ldots e_2}_{k}] \Rightarrow$$

(спрема (1.1)) $\Leftrightarrow [x \underbrace{e_1 e_1 \ldots e_1}_{2k-1} e_2 = y \underbrace{e_1 e_1 \ldots e_1}_{k-1} \underbrace{e_2 e_2 \ldots e_2}_{k+1}] \Leftrightarrow$

(применувајќи го истиот постапок уште $n-1$ пати) $\Leftrightarrow$ $[x = y \underbrace{e_2 e_2 \ldots e_2}_{2k}]; \Rightarrow 6°$.

Со тоа точноста на 1.1 е во потполност докажана.

Наредните две теореми се следствија од 1.1.

Теорема 1.2 Нека $e \in E_i \Leftrightarrow e$ е $i-n$. за A. $[A$ е асоцијативна и $E_2 \neq \emptyset$[1]$] \Rightarrow E_2 \leqslant E_1 = E_3$.

Доказ. $e \in E_2$ (спрема 1.1 3°) $\Rightarrow e \in E_1$ и $e \in E_3 \Rightarrow E_2 \leqslant E_1 \cap E_3$; $f \in E_1$ (спрема 1.1 5°) $\Leftrightarrow f \in E_3 \Rightarrow E_1 = E_3 \Rightarrow$ 1.2

Во овој случај наместо E_1 и E_3 ќе пишуваме E.

Теорема 1.3 $[(M;.)$ е полугрупа[2] и $(\exists\, a, b \in M)\ (\forall x \in M)\ a.\,x.\,b = x] \Rightarrow [a.\,b = b.\,a$ е неутрален елемент на полугрупата и $(\forall x \in M)$ $a.\,x = x.a,\ b.x = x.b]$

Доказ. Ако ставиме $A\,(x\,y\,z) = x.\,y.z$, добиваме тернарна асоцијативна операција за која $(a\,b)$ е $2-n$. (спрема 1.1 3°) $\Rightarrow$ $(a\,b)$ и $(b\,a)$ се $i-n$. за $i = 1{,}3$; $\Rightarrow$

$(\forall x \in M)\ x = (a.b).\,x = x.\,(a.b) = (b.a).\,x \Rightarrow a.\,b = b.\,a$ е неутр. ел. во $(M;.)$; $\Rightarrow x.a = (a.x.b).\,a = a\,(x.\,b.\,a) = a.\,x$; аналогно: $x.b = b.x$; $\Rightarrow$ 1.3

---

[1]) Со $\emptyset$ го означуваме празното множество

[2]) т. е. „ · “ е асоцијативна бинарна операција во M.

Забелешка 1.4 Во 1.1 не може наместо 2° да се стави 2': $(e_1\, e_2)$ е 1 $-n$. или 2": $(e_1\, e_2)$ е 3 $-n$. Исто така не може 1° да се замени со некоја од тие релации; тоа се гледа од наредните примери.

Пример 1.5 $(M;.)$ е некомутативна група и $a.\,b \neq b.\,a \;\Rightarrow$ $(a\,a^{-1})$ е i $-n$. за $i = 1{,}3$, но не е 2 $-n$., за тернарната операција A определена со $A\,(x\,y\,z) = x.y.z$.

Пример 1.6 Нека во множеството $\{a, b\}$ определиме тернарна операција со: $a = a\,a\,a = a\,a\,b = a\,b\,a = b\,a\,a = b\,b\,a = b\,b\,b$, $b = b\,a\,b = a\,b\,b$. Очигледно, $(a\,b)$ е i $-n$. за $i = 1, 2, 3$, но операцијата не е асоцијативна, оти например, $a\,(a\,a\,b)\;b = a\;a\,b = a \neq b = a\,b\,b = (a\,a\,a)\,bb$.

2 Примитивни операции за дадена тернарна операција

Спрема 0.4, за секоја n-арна операција A, идентичната унарна операција и самата операција A се примитивни; тоа е единствената унарна, односно n-арна примитивна операција за A. Значи ако $n = 3$, останатите примитивни операции се бинарни.

Теорема 2.1 [A е асоцијативна за која $(e_1\, e_2)$ е 1 $-n$., а B бинарна операција] $\Rightarrow$ $\{[(\forall\, x, y, z \in M)\, B(x\,B\,(y\,z)) = x\,y\,z] \Leftrightarrow [(\exists\, e \in M)$ e е 1 $-n$. за A и $(\forall\, x, y \in M)\;B\,(x\,y) = x\,y\,e]\}$

Доказ. $(\forall x, y, z \in M)\;\; B\,(x\,B\,(y\,z)) = x\,y\,z \;\;\Rightarrow$

$(\forall\, x \in M)\; x = x\,e_1\,e_2 = B\,(x\,B\,(e_1 e_2)) = B\,(x\,e)$, каде $e = B\,(e_1\,e_2) \;\;\Rightarrow$

$(\forall\, x, y \in M)\; B\,(x\,y) = B\,(x\,B\,(y\,e)) = x\,y\,e \;\;\Rightarrow$

$(\forall\, x \in M)\; x\,e\,e = B\;(x\,B\;(e\,e)) = B\;(x\,e) = x \;\Rightarrow\;$ e е 1 $-n$. за A.

Обратно, e е 1 $-n$. за A и $(\forall\, x, y \in M)\; B\,(x\,y) = x\,y\,e \;\;\Rightarrow$

$(\forall\, x, y, z \in M)\; B\,(x\,B\,(y\,z)) = x\,(y\,z\,e)\;e = (x\,y\,z)\;e\,e = x\,y\,z;$ $\Rightarrow$ 2.1.

На ист начин се докажува точноста на следната

Теорема 2.2 [A е асоцијативна за која $(e_1\, e_2)$ е 3 —n., а B бинарна операција] $\Rightarrow$ $\{[(\forall\, x, y, z \in M)\;\; B\;(B\,(x\,y)\;z) = x\,y\,z] \Leftrightarrow [(\exists\, e \in M)$ e е 3 $-n$. за A и $(\forall\, x, y \in M)\; B\,(x\,y) = e\,x\,y]\}$

Забелешка 2.3 Од особините на асоцијативните бинарни операции следува дека некоја тернарна операција е асоцијативна ако барем една нејзина бинарна примитивна операција е асоцијативна. Обратното не е точно, т.е. од асоцијативноста на тернарната операција не следува асоцијативноста на сите нејзини примитивни операции; тоа се гледа од наредниот пример.

Нека $(M;.)$ е некомутативната група со 6 елементи; нејзината мулитпликативна шема гласи

$\cdot$	e	a_1	a_2	b_1	b_2	b_3
e	e	a_1	a_2	b_1	b_2	b_3
a_1	a_1	a_2	e	b_2	b_3	b_1
a_2	a_2	e	a_1	b_3	b_1	b_2
b_1	b_1	b_3	b_2	e	a_2	a_1
b_2	b_2	b_1	b_3	a_1	e	a_2
b_3	b_3	b_2	b_1	a_2	a_1	e

Ако ставиме $A\ (x\,y\,z) = x.\,y.\,z$ добиваме асоцијативна тернарна операција, за која операцијата B определена со $B\ (x\,y\,) = x.\,y.b_1$ е примитивна, бидејќи $B\ (x\,B\,(y\,z)) = x.\,y.\,z.\,b_1^{\,2} = x.\,y.\,z$, но B не е асоцијативна, оти например, $B\ (B\ (e\,e)\ a) = a_2 \neq a_1 = B\ (eB\ (ea))$.

На прашањето кои примитивни операции од некоја тернарна асоцијативна операција со некој 2-неутр. пар се асоцијативни, дава одговор наредната теорема.

Теорема 2.4 Нека $(\forall x, y \in M)\ A_a(x\,y) = A\ (x\,y\,a),\ {}_aA\ (x\,y) = A\ (a\,x\,y)$

$[A$ е асоцијативна, за која $(e_1\,e_2)$ е $2 - n.] \Rightarrow (1^\circ$ и $2^\circ)$, каде

1° $[B$ е бинарна примитивна операција за $A] \Leftrightarrow$ $[(\exists\, e \in E)$[1] $B = A_e$ или $B = {}_eA]$

2° $e, f \in E \Rightarrow \{[A_e = A_f \Leftrightarrow e = f];\ [{}_fA = A_e \Leftrightarrow e = f \in E_2$ $\Leftrightarrow$ A_e е асоцијативна операција$]\}$.

Доказ. 1°: Спрема 1.1 3°, $(e_1\,e_2)$ е $1 - n.$ и $3 - n.$ за $A \Rightarrow$ (спрема 0.4 2.1 и 2.2) $\Rightarrow 1^\circ$.

2°: $A_e = A_f \Rightarrow\ e = e_1\,e_2\,e = A_e\,(e_1\,e_2) = A_f\,(e_1\,e_2) = e_1\,e_2\,f = f$; овде не е користен условот $e, f \in E$.

${}_fA = A_e \Rightarrow\ e = e_1\,e_2\,e = A_e\ (e_1\,e_2) = {}_fA\ (e_1\,e_2) = f\,e_1\,e_2 = f \Rightarrow$
$(\forall\, x \in M)\ x = e\,e\,x = {}_eA\ (e\,x) = A_e\,(e\,x) = e\,x\,e \Rightarrow e \in E_2 \Rightarrow$
$(\forall\, x, y, z \in M)\ A_e\,(x\,A_e\,(y\,z)) = x\,(y\,z\,e)\,e = x\,(y\,e\,z)\,e = (x\,y\,e)\,z\,e =$
$= A_e\,(A_e\,(x\,y\,)\,z) \Rightarrow A_e$ е асоцијативна;

$e \in M$ и A_e е асоцијативна $\Rightarrow$
$(\forall\, x \in M)\, x = e\,e\,(x\,e\,e) = e\,(e\,x\,e)\,e = A_e\,(e\,A_e\,(e\,x)\,) = A_e\,(A_e\,(e\,e)\ x) =$
$= e\,x\,e \Rightarrow e \in E_2; \Rightarrow 2^\circ; \Rightarrow 2.4.$

Забелешка 2.5 Ако се отфрли претпоставката за асоцијативност или егзистенција на 2- неутрален пар, за тернарната операција A, примитивни бинарни операции можат да постојат и кога $E_1 = E_3 = \emptyset$; тоа се гледа од наредните примери.

Пример 2.6 Нека $(\exists\, a \in M)\ (\forall\, x, y, z \in M)\ A\ (x\,y\,z) = a$. Очигледно A е асоцијативна операција за која бинарната операција B определена со $[(\forall\, x, y \in M)\ \ B\ \ (x\,y) = a]$ е примитивна и покрај тоа што $E_1 = E_2 = E_3 = \emptyset$, ако M содржи елементи $\neq a$.

---

[1] V. 1. 2.

Пример 2.7 Нека M е множеството од рационални броеви во кое дефинираме тернарна операција A со

$(\forall\, x, y, z \in M)\ A\,(x\,y\,z) = 4x + y + {}^1\!/_2\, z + 3.$

Очигледно, $E_1 = E_3 = \emptyset$, а E_2 е бескрајно множество, но се пак операцијата B определена со: $(\forall x, y \in M)\ B\,(x\,y) = 2x + {}^1\!/_2\, y + 1$ е примитивна за A. Навистина, $B\,(B\,(x\,y)\,z) = 2\,(2x + {}^1\!/_2\, y + 1) + {}^1\!/_2\, z + 1 = 4x + y + {}^1\!/_2\, z + 3 = A\,(x\,y\,z)$.

Summary

ON THE TERNARY ASSOCIATIVE OPERATIONS

G. Čupona

In this note it is shown that [(1 and 2) $\Longrightarrow$ (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 and 10)] where

1: A is a ternary associative operation in the set M, *i.e.*

$(\forall\, x, y, z, u, v \in M)\ (xyz)\,uv = x\,(yzu)\,v = xy(zuv)$, where $xyz = A\,(x, y, z)$;

2: $(e_1\, e_2)$ is a neutral pair for A, *i.e.* $(\forall\, x \in M)\ e_1\, x\, e_2 = x$;

3: $(\forall\, x \in M)\ e_1\, e_2\, x = e_2\, e_1\, x = x\, e_1\, e_2 = x\, e_2\, e_1 = e_2\, x\, e_1 = x$;

4: $(\forall\, x, y \in M)\ e_i\, x\, y = x\, e_i\, y = x\, y\, e_i;\ i = 1,2$;

5: $(\forall\, x, y \in M)\ x\, e_1\, e_1 = y \Longleftrightarrow x = y\, e_2\, e_2$;

6: $[f_1 f_2\, e_1 = e_1$ or $f_1 f_2\, e_2 = e_2] \Longrightarrow [(\forall\, x \in M)\ x\, f_1 f_2 = f_1 f_2\, x = x]$;

7: $E_2 \leqslant E_1 = E_3$, where $e \in E_1 \Longleftrightarrow [(\forall x \in M)\ x\, e\, e = x]$, $e \in E_2 \Longleftrightarrow [(\forall x \in M)\ e\, x\, e = x]$ and $e \in E_3 \Longleftrightarrow [(\forall\, x \in M)\ e\, e\, x = x]$;

8: $A_a = A_b \Longleftrightarrow a = b;\ e, f \in E_1 \Longrightarrow \{[{}_eA = A_f \Longleftrightarrow e = f \in E_2]$ and $[e \in E_3 \Longleftrightarrow {}_eA$ is associative$]\}$, where $A_a\,(x\,y) \equiv x\,y\,a,\ {}_aA\,(x\,y) \equiv a\,x\,y$;.

9: $[(\forall\, x, y, z \in M)\ x\,y\,z = x\,.\,(y\,.\,z)] \Longleftrightarrow [(\exists\, e \in E_1)$ „ $\cdot$ " $= A_e]$;

10: $[(\forall\, x\,y, z \in M)\ x\,y\,z = (x \circ y) \circ z] \Longleftrightarrow [(\exists\, e \in E_3)$ „ $\circ$ " $= {}_eA]$.
