ЗА РЕДУЦИБИЛНИТЕ ПОЛУГРУПИ

Ѓ. ЧУПОНА

Во ова работа се разгледуваат редуцибилните полугрупи како едно обопштување на полугрупите со неутрални елементи.

1. **Редуцибилни пресликувања.** Нека $(\forall x\in M)\ f(x)\subseteq M$[1]), т. е. со f секој елемент од M се пресликува во некое подмножество од M. За подмножеството R велиме дека е *f-редуцирано* ако ги задоволува релациите

(1·1) $f(R)=M$, при што $f(R)=\bigcup\limits_{x\in R} f(x)$

(1·2) $(\forall x,\ y\in R)$ од $f(x)\subseteq f(y)$ следува $x=y$

(1·3) $(\forall x\in R,\ y\in M)$ од $f(x)\subseteq f(y)$ следува $f(x)=f(y)$.

Во случај кога постојат две различни f-редуцирани множества R_1 и R_2, ако $(\forall x\in M)\ f(f(x))\subseteq f(x)$, од (1·1) и (1·2) следува дека меѓу нивните елементи постои реципрочно еднозначна кореспонденца окарактеризирана со релацијата

(1·4) $(\forall x\in R_1,\ y\in R_2)$ $x\to y$ еквивалентно со $f(x)=f(y)$.

Пресликувањето f е *редуцибилно* во M, ако постои некое f-редуцирано подмножество од M.

Наредната теорема претставува еден критериј за редуцибилноста на дадено пресликување.

Т е о р е м а 1. Ако пресликувањето f ја задоволува релацијата $(\forall x\in M)\ f(f(x))\subseteq f(x)$, тоа е редуцибилно во M ако и само ако се точни релациите

(1·5) $f(M)=M$

(1·6) $(\forall x\in M)\ (\exists y\in M)\ (\forall z\in M)\ f(x)\subseteq f(y),\ f(y)\mathrel{\overline{\subset}} f(z)$.[1])

---

[1]) Нека $S\equiv T$ означува дека S се пишува наместо T.
$(\forall x\in M)\equiv$ „за секој елемент x од M"; $(\exists x\in M)\equiv$ „постои некој елемент x од M"; $(\exists! x\in M)\equiv$ „постои еден и само еден ел. x од M"; $F\mathrel{\overline{\subset}} Q\equiv$ „F не е право подмножество од Q".

Доказ. Ако R е f-редуцирано, од (1·1) следува (1·5), а од (1·1) и (1·3), поради споменатата особина на f, следува (1·6). Обратно, нека f ги задоволува релациите (1·5) и (1·6) и нека M' ги содржи сите елементи $y \in M$ со особината $(\forall x \in M)\ f(y) \sqsubset f(x)$; групирајќи ги елементите од M во класи така да f биде константа во секоја класа и земајќи по еден елемент од секоја класа добиваме едно f-редуцирано множество.

Теорема 2. Нека пресликувањата f_1 и f_2 ја задоволуваат релацијата

(1·7) $(\forall x \in M)\ f_1(x) \subseteq f_2(x),\ f_i(f_j(x)) \subseteq f_j(x),\ i, j = 1,2.$

Од редуцибилноста на f_1 следува редуцибилноста на f_2; обратно, при $f_1(M) = M$, од редуцибилноста на f_2 следува редуцибилноста на f_1.

Доказ. Нека R_1 е f_1 - редуцирано множество. Прво ќе покажеме дека е точна следната релација:

(1·8) $(\forall x \in R_1)\ x \in f_1(x).$

Спрема (1·1), имаме $(\forall x \in R_1)(\exists y \in R_1)\ x \in f_1(y)$, од каде спрема (1·7), следува $f_1(x) \subseteq f_2(f_1(y)) \subseteq f_1(y)$, а од тоа, спрема (1·2), се добива $x = y$, т. е. точноста на (1·8).

Од (1·7) и (1·8) се добива релацијата

(1·9) $(\forall x \in R_1)\ f_1(x) = f_2(x).$

Навистина, од $x \in f_1(x)$, спрема (1·7), следува $f_2(x) \subseteq f_2(f_1(x)) \subseteq f_1(x)$, од каде, поради $f_1(x) \subseteq f_2(x)$, се добива(1·9).

Од (1·9), заради тоа што R_1 е f_1 - редуцирано, следува дека R_1 ги задоволува релациите (1·1) и (1·2) и во однос на f_2, а од тоа, спрема (1·7), следува дека е задоволена и (1·3). Значи R_1 е f_2 - редуцирано.

Нека сега претпоставиме дека R_2 е f_2 - редуцирано. Од $f_1(M) = M$ следува $(\forall x_2 \in R_2)(\exists x_1 \in M)\ x_2 \in f_1(x_1)$, па значи, постои барем едно подмножество R_1 од M со особината $(\forall x_2 \in R_2)(\exists!\, x_1 \in R_1)\ x_2 \in f_1(x_1)$; ќе покажеме дека R_1 е f_1 - редуцирано. Навистина, од (1·7), следува $(\forall x_2 \in R_2)\, f_2(x_2) \subseteq f_2(f_1(x_1)) \subseteq f_1(x_1) \subseteq f_2(x_1)$, од каде, поради тоа што R_2 е f_2 - редуцирано, се добива $f_2(x_2) = f_1(x_1)$, а од тоа лесно се добива дека R_1 е f_1 - редуцирано.

Со тоа е докажана точноста на теоремата.

2. **Редуцибилни полугрупи.** Нека $(M, \cdot)$ е *полугрупа*, т. е. алгебарска структура со една бинарна *асоцијативна операција*. Со помош на бинарната операција, во M можат да се дефинираат различни пресликувања, па потоа да се пренесе појмот за редуцибилност кај полугрупите, барајќи определеното пресликување да биде редуцибилно во M. Овде ќе се задржиме на два вида редуцибилни полугрупи.

Нека $M \cdot x = \bigcup_{y \in M} \{y \cdot x\}$, а $M(x)$ нека ги содржи сите елементи од M за кои x е десен неутрален елемент, т. е.

(2 · 1) $(\forall x, y \in M)$ $y \in M(x)$ еквивалентно со $y \cdot x = y$.

Лесно се покажува точноста на наредните три релации.

(2 · 2) $(\forall x \in M)$ $M(x) \subseteq M \cdot x$

(2 · 3) $(\forall x, y \in M)$ од $y \in M \cdot x$ следува $M \cdot y \subseteq M \cdot x$

(2 · 4) $(\forall x, y \in M)$ од $y \in M(x)$ следува $M \cdot y \subseteq M(x)$.

Тие се, имено, непосредни следствија од дефиницијата на множествата $M \cdot x$ и $M(x)$ и асоцијативноста на операцијата од полугрупата.

Полугрупата $(M, \cdot)$ е *редуцибилна* ако пресликувањето $x \to M \cdot x$ е редуцибилно, а *неутрално редуцибилна*, ако е редуцибилно пресликувањето $x \to M(x)$.

Ако ставиме $(\forall x \in M)$ $f_2(x) = M \cdot x, f_1(x) = M(x)$, од (2 · 2), (2 · 3) и (2 · 4) следува дека ќе биде исполнета и релацијата (1 · 7), а од тоа, спрема теоремата 2, се добива следната

Т е о р е м а 3. *Секоја неутрално редуцибилна полугрупа е редуцибилна; обратно, ако во редуцибилната полугрупа* $(M, \cdot)$ *е точна релацијата* $\bigcup_{x \in M} M(x) = M$, *тогаш е и неутрално редуцибилна.*

Од релацијата (1 · 7) се добива и тоа дека сите елементи од некое неутрално редуцирано множество R_0 (т. е. множество кое е редуцирано во однос на пресликувањето $x \to M(x)$) се идемпотентни, а од тоа се добива дека $(\forall x \in R_0)$ $(M(x), \cdot)$ е потполугрупа со десен неутрален елемент x. Истотака, секој елемент од некое редуцирано множество R (т. е. множество кое е редуцирано во однос на пресликувањето $x \to M \cdot x$) има лев неутрален елемент, т. е. $(\forall x \in R)(\exists x' \in M)\ x' \cdot x = x$.

3. Придружени пресликувања. Нека $(M, \cdot)$ е полугрупа и $(\forall x \in Q)\ h(a) \subseteq M$, каде $Q \subseteq M$. Ќе велиме дека h е *придружено пресликување* на Q во полугрупата, а за пократко ќе пишуваме само п. п., ако се исполнети следните релации

(3 · 1) од $a \in Q$, $x, y \in M$, $x \cdot a = y \cdot a$ следува $(\forall a' \in h(a))$ $x \cdot a' = y \cdot a'$

(3 · 2) од $a, b \in Q$, $x, y \in M$, $x \cdot a = y \cdot b$ следува

$$(\forall a' \in h(a))\ (\exists b' \in h(b))\ x \cdot a' = y \cdot b'.$$

Дека постојат п. п-а за секое множество Q, може да се види ако се стави, например, $(\forall a \in Q)$ $h(a) = a$.

Ќе покажеме сега дека е точна следната

Т е о р е м а 4. *За секое подмножество* Q, *постои едно и само едно максимално* п. п. g, *такво да од* h *е* п. п. *на* Q *следува* $(\forall a \in Q)\ h(a) \subseteq g(a)$.

Доказ. Нека H е множеството на сите п. п-а на Q и нека $(\forall a \in Q)\ g(a) = \bigcup_{h \in H} h(a)$. Од тоа следува дека $(\forall a \in Q, h \in H)\ h(a) \subseteq g(a)$, а истотака лесно се покажува дека g ги задоволува релациите (3 · 1) и (3 · 2), т. е. дека g е п. п. за Q.

Во натамошната работа множеството $g(a)$ ќе го наречеме *придружено множество* на a во однос на Q. Кореспонденцијата меѓу елементите од две редуцирани множества на една редуцибилна полугрупа, окарактеризирана со $(1 \cdot 4)$, индуцира соодветна кореспонденца меѓу двете фамилии придружени множества; таа индуцирана кореспонденца е донекаде окарактеризирана со следната

Теорема 5. Нека R_1 и R_2 се редуцирани множества од редуцибилната полугрупа $(M, \cdot)$ и нека $a_1 \in R_1$, $a_2 \in R_2$ е еден пар кореспондентни елементи, т. е. $(\exists\, c_1, c_2 \in M)\ a_1 = c_1 \cdot a_2,\ a_2 = c_2 \cdot a_1$.

Придружените множества $g_1(a_1)$ и $g_2(a_2)$[1]) се поврзани со релациите

$$(3 \cdot 3)\quad c_2 \cdot g_1(a_1) \subseteq g_2(a_2),\ c_1 \cdot g_2(a_2) \subseteq g_1(a),$$

а во случај кога полугрупата содржи некој лев неутрален елемент e[2]), точни се равенствата

$$(3 \cdot 4)\quad c_2 \cdot g_1(a_1) = g_2(a_2),\ c_1 \cdot g_2(a_2) = g_1(a_1).$$

Доказ. Нека ставиме $(\forall\, a_2 \in R_2)\ h_2(a_2) = c_2 \cdot g_1(a_1)$; при тоа можеме да сметаме дека за секој пар кореспондентни елементи a_1, a_2, парот c_1, c_2 е еднозначно определен. Ќе покажеме прво дека h_2 е п. п. на R_2 а со тоа ќе биде покажана точноста на првата релација од $(3 \cdot 3)$; од причини на симетрија, од тоа ќе следува точноста и на втората релација.

Од $x \cdot a_2 = y \cdot a_2$ се добиза

$$(x \cdot c_2) \cdot a_1 = x \cdot (c_2 \cdot a_1) = x \cdot a_2 = y \cdot a_2 = y \cdot (c_2 \cdot a_1) = (y \cdot c_2) \cdot a_1,$$

од каде, спрема $(3 \cdot 1)$, следува

$$(\forall a_1' \in g_1(a_1))\ x \cdot (c_2 a_1') = (x \cdot c_2) \cdot a_1' = (y \cdot c_2)\ a_1' = y \cdot (c_2 a_1'),$$

т. е. дека h_2 ја задоволува релацијата $(3 \cdot 1)$.

Нека $b_2 \in R_2$, а b_1 е елементот од R_2 што му кореспондира на b_2, т. е. $(\exists\, d_1, d_2 \in M)\ b_2 = d_2 \cdot b_1,\ b_1 = d_1 \cdot b_2$. Од $u \cdot a_2 = v \cdot b_2$ следува

$$(u \cdot c_2) \cdot a_1 = u \cdot (c_2 \cdot a_1) = u \cdot a_2 = v \cdot b_2 = v \cdot (d_2 \cdot b_1) = (v \cdot d_2)\, b_1,$$

од каде, спрема $(3 \cdot 2)$, следува

$$(\forall a_1' \in g_1(a_1))\ (\exists b_1' \in g_1(b_1))\ (u \cdot c_2) \cdot a_1' = (v \cdot d_2) \cdot b_1',$$

од каде се добива $u \cdot (c_2 a_1') = v \cdot (d_2 b_1')$, т. е. дека h_2 ја задоволува релацијата $(3 \cdot 2)$. Значи h_2 е п. п. за R_2, а од тоа следува точноста на $(3 \cdot 3)$.

Нека сега претпоставиме дека e е лев неутрален елемент на полугрупата, т. е. дека

$$(\forall a_1 \in R_1)\ e \cdot a_1 = a_1 = c_1 \cdot a_2 = c_1 \cdot (c_2 \cdot a_1) = (c_1 \cdot c_2) \cdot a_1,$$

а од тоа добиваме

$$(\forall a_1' \in g_1(a_1))\ a_1' = e \cdot a_1' = (c_1 \cdot c_2) \cdot a_1' = c_1 \cdot (c_2 \cdot a_1'),$$

[1]) g_i е п. п. на R_i.

[2]) т. е. $(\forall x \in M)\ e \cdot x = x$.

т. е. дека $g_1(a_1)=c_1\cdot(c_2\cdot g_1(a_1))$, а од тоа, спрема $(3\cdot 3)$ се добива второто равенство од $(3\cdot 4)$. И во овој случај, од причини на симетрија, од тоа следува точноста и на првото равенство. Со тоа точноста на теоремата е во потполност покажана.

Наредната теорема покажува дека кај еден поспецијален вид редуцибилни полугрупи, со помош на придружените множества на некое редуцирано множество, потполно се определени сите десни *транслации* на полугрупата, т, е. еднозначните пресликувања од M во M, за кои важи релацијата $(\forall x, y\in M)\ \varphi(x\cdot y)=x\cdot\varphi(y)$.

Т е о р е м а 6. Нека R е редуцирано множество во полугрупата $(M,\cdot)$ и нека $(\forall a, b\in R)$ од $a\neq b$ следува $(\forall x, y\in M)\ x\cdot a\neq y\cdot b$.

На секое еднозначно пресликување ψ *од* R *во* M *со особината* $(\forall a\in R)\ \psi(a)\in g(a)$ *ѝ кореспондира една десна транслација на полугрупата; обратно, на секоја десна транслација ѝ кореспондира едно пресликување од тој вид.*

Доказ. Нека $(\forall a\in R)\ \psi(a)\in g(a)$ и $\varphi(x\cdot a)=x\cdot\psi(a)$. φ е еднозначно определена, бидејќи спрема направената претпоставка, од $x=x_1\cdot a=x_2\cdot b,\ a, b\in R$ следува $a=b$. т. е. $x=x_1\cdot a=x_2\cdot a$, а заради $\varphi(a)\in g(a)$, од тоа се добива $\varphi(x)=x_1\cdot\psi(a)=x_2\cdot\psi(a)$. Ќе покажеме сега дека φ е десна транслација; навистина, ако $y=y_1\cdot b,\ b\in R$ имаме

$$\varphi(x\cdot y)=\varphi((x\cdot y_1)\cdot b)=(x\cdot y_1)\cdot\psi(b)=x\cdot(y_1\cdot\psi(b))=x\cdot\varphi(y).$$

Обратно, нека φ е десна транслација; ќе покажеме дека е точна релацијата $(\forall a\in R)\ \varphi(a)\in g(a)$, а од тоа ќе следува и точноста на теоремата, бидејќи може да се стави $(\forall a\in R)\ \psi(a)=\varphi(a)$. Од $x\cdot a=y\cdot a$, $a\in R$ следува

$$x\cdot\varphi(a)=\varphi(x\cdot a)=\varphi(y\cdot a)=y\cdot\varphi(a),$$

а од тоа спрема направената претпоставка за полугрупата следува $\varphi(a)\in g(a)$.

Лесно се покажува дека вториот дел од горната теорема е точен за секоја редуцибилна полугрупа.

З а б е л е ш к а. Редуцибилноста на полугрупите дефинирана во 2. е десна. Аналогно може да се дефинира *лева редуцибилност* и да се пренесат резултатите од 2. и 3. и на тој случај. Имено, ако ставиме $(\forall x, y\in M)$ $x:y=y\cdot x$, лесно се покажува дека $(M,\cdot)$ е полугрупа, ако и само ако $(M,:)$ е полугрупа, па можеме да речеме дека $(M,\cdot)$ е *лево редуцибилна* ако $(M,:)$ е десно редуцибилна.

Примери.

П р и м е р. 1. Ако полугрупата $(M,\cdot)$ има некој *десен неутрален* елемент e[1], тој самиот формира едно неутрално редуцирано множество (спрема Теоремата 3 односно 2, тоа е и редуцирано); во тој случај секое редуцирано множество има само еден елемент. Обратно, ако полугрупата содржи редуцирано множество со еден елемент a и ако

[1]) т. е. $(\forall x\in M)\ x\cdot e=x$

тој е *скратив* од десно[1] во полугрупата, постои некој десен неутрален елемент; навистина од $M \cdot a = M$ следува $(\exists a' \in M)\ a' \cdot a = a$, од каде се добива $(\forall x \in M)\,(x \cdot a') \cdot a = x \cdot (a' \cdot a) = x \cdot a$, т. е. $x \cdot a' = x$; значи a' е десен неутрален елемент.

Пример 2. Ако операцијата во полугрупата $(M, \cdot)$ е дефинирана со $(\forall x,y \in M)\ x \cdot y = y$, M ќе биде неутрално редуцирано множество. Важи и обратното, т. е. ако M е редуцирано множество во полугрупата $(M, \cdot)$ тогаш $(\forall x,y \in M)\ x \cdot y = y$.

Пример 3. Нека M е дадено множество и нека $[M] = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ каде $M_1 = M$, а M_i е определено со

(4 · 1) $x \in M_i$ еквивалентно со $(\exists!\ j < i)\ (\exists! y_1 \in M_j,\ z \in M_{i-j})\ x = [y,z]$.

Значи, $[M]$ е *слободниот групоид* со M генератори, каде операцијата на групоидот е означена со [ ].

Во $[M]$ ќе дефинираме една бинарна операција „·" со

(4 · 2) $(\forall s \in M,\ x, y, z \in [M])\ s \cdot x = x,\ [y, z] \cdot x = [y \cdot x, z \cdot x]$.

Очигледно, од $x \in M_i$, $y \in M_j$ следува $x \cdot y \in M_{ij}$.

Ако елементот $p \in M$ ја задоволува релацијата

(4 · 3) $p = p_1 p_2$ еквивалентно со $p_1 \in M$, $p_2 = p$,

велиме дека е *прост*; множеството од сите прости елементи на $[M]$ го обележуваме со P. Дека P не е празно множество може да се види например од тоа што ако i е прост природен број, сите елементи од M_i се прости.

Ќе изнесеме сега некои особини на операцијата „·".

(4 · 4) $([M], \cdot)$ е полугрупа.

Доказ. Спрема (4 · 2) сите елементи од M се леви неутрални за операцијата „·", па значи $(\forall s \in M,\ x, y \in [M])\ s \cdot (x \cdot y) = x \cdot y = (s \cdot x) \cdot y$. Од $x = [x_1, x_2]$ следува

$$\begin{aligned}(\forall y, z \in [M])\ x \cdot (y \cdot z) &= [x_1, x_2] \cdot (y \cdot z) = [x_1 \cdot (y \cdot z), x_2 \cdot (y \cdot z)]\\ &= [(x_1 \cdot y) \cdot z, (x_2 \cdot y) \cdot z] = [x_1 \cdot y, x_2 \cdot y] \cdot z\\ &= ([x_1, x_2] \cdot y) \cdot z = (x \cdot y) \cdot z,\end{aligned}$$

а со тоа точноста на (4 · 4) е покажана.

(4 · 5) Нека $p, q \in P$; од $(\exists x, y \in [M])\ x \cdot p = y \cdot q$ следува $p = q$.

Доказ. Ако барем еден од елементите x, y припаѓа на M спрема (4 · 3), имаме $p = q$; нека $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1\, y_2]$; од $x \cdot p = y \cdot q$ следува $[x_1 \cdot p, y_2 \cdot p] = [y_1 \cdot q, y_2 \cdot q]$, т. е. например, $x_1 \cdot p = y_1 \cdot q$, од каде се добива $p = q$.

(4 · 6) $(\forall x \in [M])\ (\exists y \in [M])\ (\exists!\ p \in P)\ x = y \cdot p$.

Доказ. За $x \in P$, точноста е очигледна; од $x = x_1 \cdot x_2$, $x_2 = x_2' \cdot p$, $p \in P$ следува $x = x_1 \cdot (x_2' \cdot p) = (x_1 \cdot x_2') \cdot p$; дека p е еднозначно определен следува од (4 . 5).

(4 · 7) $(\forall x, y \in [M])$ од $(\exists u \in [M])\ x \cdot u = y \cdot u$ следува $(\forall v \in [M])\ x \cdot v = y \cdot v$.

[1]) т. е. $(\forall x, y \in M)$ од $x \cdot a = y \cdot a$ следува $x = y$

Доказ. Од $x \in M$ се добива $u = y \cdot u$, т. е. $y \in M$, а од тоа следува $(\forall v \in [M])\ x \cdot v = v = y \cdot v$; нека $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2]$; од $x \cdot u = y \cdot u$ следува $[x_1 \cdot u, x_2 \cdot u] = [y_1 \cdot u, y_2 \cdot u]$, т. е. $x_1 \cdot u = y_1 \cdot u$, $x_2 \cdot u = y_2 \cdot u$, од каде се добива

$(\forall v \in [M])\ x_1 \cdot v = y_1 \cdot v$, $x_2 \cdot v = y_2 \cdot v$, т. е.

$$x \cdot v = [x_1, x_2] \cdot v = [x_1 \cdot v, x_2 \cdot v] = [y_1 \cdot v, y_2 \cdot v] = [y_1, y_2] \cdot v = y \cdot v,$$

а со тоа точноста на $(4 \cdot 7)$ е покажана.

За парот x, y ќе велиме дека се еквивалентни и ќе пишуваме $x \pi y$, ако $(\exists u \in [M])\ x \cdot u = y \cdot u$.

Очигледен е доказот и на релацијата

$(4 \cdot 8)$ $(\forall x, y \in [M])\ x \cdot y = x$ е еквивалентно со $y \in M$, $x \in M \cdot y$.

Од последните релации лесно се добива точноста на следната

Т е о р е м а 7. $([M], \cdot)$ *е редуцибилна полугрупа; P е единственото нејзино редуцирано множество, а при тоа $(\forall p \in P)\ g(p) = M$. Таа полугрупа е неутрално редуцибилна, ако и само ако M се состои само од еден елемент.*

Секој елемент од $[M]$ може да се претстави како производ од прости елементи, а тоа претставување е единствено во тој смисол што од $x = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_n$, $p_i, q_j \in P$; $p_i, q_j \overline{\in} M$, следува $m = n$, $p_n = q_n$, $p_i \pi q_i$.

G. Čupona

ON REDUCIBLE SEMIGROUPS

(Summary)

1. Reducible systems. Let S be a set and $(\forall x \in S)\ T_x \subseteq S$[1]. We say that the *system* $\{T_x, x \in S\}$ is *reducible* upon S if there exists a subset $R \subseteq S$ such that (i) $S = \bigcup_{x \in R} T_x$, (ii) $(\forall x, y \in R)\ T_x \subseteq T_y \rightarrow x = y$, and (iii) $(\forall x \in R, y \in S)\ T_x \subseteq T_y \rightarrow T_x = T_y$. We say that the *system* $\{T_x, x \in R\}$ is a *reduced subsystem*, and that the subset R is a *reduced* set.

A. Let $\{T_x, x \in S\}$ be a system of subsets of the set S, and (iv) $y \in S' \longleftrightarrow \{(\forall z \in S)\ T_y \subseteq T_z \rightarrow T_y = T_z\}$. *The system* $\{T_x, x \in S\}$ *is reducible upon S if, and only if,* $S = \bigcup_{x \in S'} T_x$. The subsystem $\{T_x, x \in S'\}$ is a reduced subsystem, and if $R \subseteq S'$ contains one and only one element from every class mod π, where (v) $(\forall x, y \in S)\ x \pi y \longleftrightarrow T_x = T_y$, then R is a reduced set.

[1]) $(\forall x \in S) \ldots \equiv$ for every $x \in S \ldots$; $(\exists! x \in S) \ldots \equiv$ there exists one and only one $x \in S \ldots$ $(\exists x \in S) \ldots \equiv$ thera exists some $x \in S \ldots$; $\ldots \rightarrow \ldots \equiv \ldots$ it follows $\ldots$; $\longleftrightarrow \ldots \equiv \ldots$ equivalent to ...

B. Let $\{T_x,\ x\in S\}$ be a reducible system upon S, such that (vi) $(\forall x,\ y\in S)\ y\in T_x \to T_y \subseteq T_x$. If R is a reduced set then (vii) $(\forall x \in R)\ x\in T_x$. If R_1 and R_2 are two reduced sets then there is a one-to-one mapping θ of R_1 onto R_2 such that (viii) $(\forall x_1\in R_1,\ \ x_2\in R)\ x_2 = x_1\theta \leftrightarrow T_{x_1}=T_{x_2}$. Hence it follows that the reduced subsystem is unique.

C. Let $T_1=\{T_{1,x},\ x\in S\}$ and $T_2=\{T_{2,x},\ x\in S\}$ be two systems such that (ix) $(\forall x\in S)\ T_{1,x}\subseteq T_{2,x}$, and (x) $(\forall x,\ y\in S)\ y\in T_{r,x}\to T_{s,y}\subseteq T_{r,x}$, where $r,\ s=1,2$. *If the system T_1 is reducible, the system T_2 is reducible too. If the system T_2 is reducible, the system T_1 is reducible if and only if* $S=\bigcup\limits_{x\in S} T_{1,x}$.

2. Reducible semigroups. Let $(S,\cdot)$ be a *semigroup*[1]) and (i) $(\forall x\in S)\ S\cdot x = \bigcup\{yx\}$, (ii) $(\forall x,\ y\in S)\ y\in S(x) \leftrightarrow yx=y$.

A. Clearly (iii) $(\forall x\in S)\ S(x)\subseteq S\cdot x$, (iv) $(\forall x,\ y\in S)\ y\in S\cdot x \to S\cdot y\subseteq S\cdot x$, (v) $(\forall x,\ y\in S)\ y\in S(x)\to S\cdot y\subseteq S(x)$.

B. We say that the *semigroup* is *reducible* (*neutrally reducible*) if the system $\{S\cdot x,\ x\in S\}$ $(\{S(x),\ x\in S\})$ is reducible upon S. The set R is *reduced* (*neutrally ueduced*) if it is a reduced set for the system $\{S\cdot x,\ x\in S\}$ $(\{S(x),\ x\in S\})$.

From 1. C and 2. A it follows:

Every neutrally reducible semigroup is reducible; every neutrally reduced set is reduced too, and all its element are idempotent in the semigroup. A reducible semigroup is neutrally reducible if and only if $S=\bigcup\limits_{x\in S} S(x)$; *for every element a of a reduced set R, there exists a left identity, i. e.* $(\exists a'\in S)\ a'a=a$.

3. Associate systems. Let $(S,\cdot)$ be a semigroup and $Q\subseteq S$. We say that the system $\{T_x,\ x\in Q\}$ is *associate* to Q if

(i) $(\forall a\in Q)\ \{xa=ya\to(\forall a'\in T_a)\ xa'=ya'\}$,

(ii) $(\forall a,\ b\in Q)\ \{xa=yb\to(\forall a'\in T_a)\,(\exists b'\in T_b)\ \ xa'=yb'\}$.

A. Clearly, if $(\forall t\in A)\ \{T_{t,x}\ x\in Q\}$ is an asociate system to Q, then $\{\bigcup\limits_{t\in A} T_{t,x},\ x\in Q\}$ is an associate system to Q too. Hence it follows that there exists a maximal associate system to Q $\{Z_x,\ x\in S\}$ such that, if $\{T_x,\ x\in Q\}$ is an associate system to Q then $(\forall x\in Q)\ T_x\subseteq Z_x$. Namely, if $t\in A\leftrightarrow\{T_{t,x},\ \ x\in Q\}$ is an associate system to Q, then the system $\{\bigcup\limits_{t\in A} T_{t,x},\ x\in Q\}$ is the *maximal* associate system to Q.

B. Let R_1 and R_2 be two reduced sets of a reducible semigroup $(S,\cdot)$ and $a_1\in R_1$, $a_2\in R_2$ a corresponding pair, i. e., according to 1. B, $(\exists c_1,\ c_2\in S)\ a_1=c_1a_2,\ a_2=c_2a_1$. Then we have (iii) $c_1\cdot Z_{2,a_2}\subseteq Z_{1,a_1}$, $c_2\cdot Z_{1,a_1}\subseteq Z_{2,a_2}$, where $\{Z_{i,a_i},\ a_i\in R_i\}$ is the maximal associate system to R_i. If there is a left identity e in the semigroup, then (iv) $c_1\cdot Z_{1,a_2}=Z_{1,a_1}$, $c_2\cdot Z_{1,a_1}=Z_{2,a_2}$.

---

[1]) i. e. „·" is a binary associative operation on the set S.

C. If φ is a right translation of the semigroup $(S, .)$, i. e. if (v) $(\forall x, y \in S)\ (xy)\varphi = x \cdot y\varphi$, then for every subset $Q \subseteq S$, we have (vi) $(\forall x \in Q)\ x\varphi \in Z_x$.

Let R be a subset of the set S such that (vii) $S = SR = \underset{x \in R}{U} S \cdot x$, and (viii) $(\forall x, y \in R)\ x \neq y \to (\forall u, v \in S)\ ux \neq vy$. If ψ is a mapping of R into S such that (ix) $(\forall a \in R)\ a\psi \in Z_a$, then the mapping φ which is defined by (x) $(\forall a \in R, x \in S.\ a)\ x = x_1 a \to x\varphi = x_1 . a\psi$ is a right translation of the semigroup. Conversely, if φ is a right translation, then the mapping ψ induced by φ on the sct R satisties the relations (ix).

4. A Example. Let $[S] = \overset{\infty}{\underset{k=1}{U}} S_k$, where $S_1 = S$ be a set, and

(i) $x \in S_k \leftrightarrow (\exists!\ r < k,\ y \in S_r,\ z \in S_{k-r})\ x = [y, z]$, where $k > 1$.

On the set $[S]$ we define a binary operation „$\circ$" as follows:

(ii) $(\forall a \in S)\ (\forall x, y, \in [S])\ a \circ x = x,\ [x, y] \circ z = [x \circ x,\ y \circ z]$.

We say that $p \in [S]$ is a prime if

(iii) $(\forall x, y \in [S]\ p = x \circ y \leftrightarrow x \in S,\ y = p$;

here we suppose that S contains more than one element; if S contains only one element a, we would say that p is a prime if $p = x \circ y \leftrightarrow \leftrightarrow x = a$ or $y = a$.

A. We have:

(iv) $([S], \circ)$ is a semigroup;

(v) $(\forall x, y \in [S])\ x \circ y = x \leftrightarrow y \in S,\ x \in [S] \circ y$
$x \circ y = y \leftrightarrow x \in S$;

(vi) $(\forall x, y \in [S])\ \{[(\exists u \in [S])\ \ x \circ u = y \circ u] \to [(\forall v \in [S])\ \ x \circ v = y \circ v]\}$; in this case we say that x and y are similar and we write $x \omega y$;

(vii) $(\forall x \in [S])\ (\exists p_1, p_2, \ldots p_m \in P)\ x = p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_m$, where P is the set of all primes of the semigroup $([S], \circ)$;

(viii) $(\forall p_i, q_j \in P \setminus S)\ p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_m = q_1 \circ q_2 \circ \ldots \circ q_n, \to \to m = n,\ p_m = q_n,\ p_i\ \omega\ q_i$.

B. From the last five relations it follows:

$([S], \circ)$ is a reducible semigroup. If S contains more than one element, then P is the uniqe reduced set and $(\forall p \in P)\ Z_p = [S] \circ p$. The semigroup $([S], \circ)$ is neutrally reducible if and only if S contains only one element.