DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ

O OPERACIJAMA *MAX* I *MIN*

1. Posmatrajmo jedan konačan skup proizvoljnih realnih brojeva

$$E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

Prema definiciji[1]), *max* $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ označava onaj (ili one) od n brojeva $a_1, a_2, \cdots, a_n$ koji nije premašen ni od jednog od ostalih brojeva tog skupa. Na analogi način definiše se operacija *min* $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

U skupu E operacije *max* i *min* uvek su izvodljive, drugim rečima skup E uživa *grupnu osobinu*[2]) ili, kako se to drukčije kaže, skup E zadovoljava *grupni stav*[3]) (prvi postulat).

Da bismo uprostili pisanje, označimo sa a, b, c tri ma koja elementa skupa E. Lako se pokazuje da operacije *max* i *min* zadovoljavaju ove zakone[4]):

I. *Idempotentni zakon:*

$$\max(a, a) = a, \quad \min(a, a) = a;$$

II. *Komutativni zakon:*

$$\max(a, b) = \max(b, a), \qquad \min(a, b) = \min(b, a);$$

III. *Asocijativni zakon:*

$$\max\{\max(a, b), c\} = \max\{a, \max(b, c)\},$$
$$\min\{\min(a, b), c\} = \min\{a, \min(b, c)\};$$

IV. *Apsorpcioni zakon:*

$$\max\{a, \min(a, b)\} = a,$$
$$\min\{a, \max(a, b)\} = a;$$

---

1) [1], str. XVI. Brojevi u zagradama odnose se na bibliografiju datu iza rezimea.

2) [2], paragraf 185.

3) [3], str. 10, paragraf 1.

4) [4], str. 104.

V. *Distributivni zakon:*

$$\max\{a, \min(b,c)\} = \min\{\max(a,b), \max(a,c)\},$$

$$\min\{a, \max(b,c)\} = \max\{\min(a,b), \min(a,c)\}.$$

Dakle, svaka od operacija *max* i *min* je komutativna, asocijativna i distributivna u odnosu na drugu operaciju.

Prenumerisavanjem uvek se može podesiti da su elementi $a_1, a_2, \cdots, a_n$ takvi da je

$$(1) \qquad a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n;$$

tada je za operaciju *max* jedinični element a_1, jer je, za svako $k\,(1 \leqslant k \leqslant n)$,

$$\max(a_1, a_k) = a_k.$$

Taj jedinični element je u isti mah i levi i desni.

Pod pretpostavkom (1), za *min* u skupu E jedinični element je a_n, jer je

$$\min(a_k, a_n) = a_k$$

za svako $k\ (1 \leqslant k \leqslant n)$. I u ovom slučaju a_n je dvostrani jedinični element.

Za operaciju *max* kao i za operaciju *min* skup E čini grupu u slučaju kada su elementi a_i međusobno jednaki, tj. $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Navešćemo sada jednu interesantnu osobinu operacija *max* i *min* koju algebrista O. Ore[5] naziva *neobična* (peculiar) *osobina*. Ona se može ovako formulisati:

Za tri ma koja realna broja a, b, c koji pripadaju skupu E važi relacija

$$(2) \qquad \min\{\max(a,b),\ \max(a,c),\ \max(b,c)\} = \max\{\min(a,b),\ \min(a,c),\ \min(b,c)\},$$

prema kojoj izraz što se nalazi na jednoj strani zadržava svoju vrednost kada se operacije max *i* min *međusobno razmene.*

2. U prethodnom paragrafu izneli smo nekoliko, većim delom poznatih osobina operacija *max* i *min*, i to iz ovih razloga:

1° što u matematičkoj literaturi na jezicima jugoslovenskih naroda o ovome nije ništa pisano;

---

[5] [4], str. 107.

2^0 što bismo želeli da od napred izloženog i od onog što sleduje stvorimo jednu celinu[6] o operacijama *max* i *min*.

U vezi sa relacijom (2) može se postaviti pitanje o tome da li ima izraza opštijih od izraza

$$\min\{\max(a,b), \max(a,c), \max(b,c)\}$$

koji uživaju *neobičnu* osobinu da im vrednost ostaje invarijantna ako se operacije *max* i *min* međusobno razmene. Na ovo pitanje odgovor je potvrdan, kao što će niže biti pokazano.

3. Iz skupa E uzmimo p ma kojih različitih elemenata

$$A_1, A_2, \cdots, A_p \qquad (p \leqslant n) \tag{3}$$

koje smo pre novog označavanja uredili tako da je

$$A_1 < A_2 < \cdots < A_p \tag{4}$$

i obrazujmo sve kombinacije bez ponavljanja klase k $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Tako ćemo dobiti $\binom{p}{k}$ kombinacija

$$\begin{array}{c} A_1, A_2, \cdots, A_k; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \cdots, A_p. \end{array} \tag{5}$$

Primenom operacija *max* i *min* na sve kombinacije (5), mogu se obrazovati ova dva izraza

$$M = \max\{\min(A_1, A_2, \cdots, A_k), \cdots, \min(A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \cdots, A_p)\}, \tag{6}$$

$$N = \min\{\max(A_1, A_2, \cdots, A_k), \cdots, \max(A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \cdots, A_p)\}. \tag{7}$$

---

[6]) A. Suškevič [6] i M. Fedoseev [7] bavili su se sistemima sa dve operacije za koje važe dva distributivna zakona. Za ilustraciju teorije uzimali su operacije *max* i *min*. Sa radovima Suškeviča i Fedoseeva upoznali smo se preko referata koje su doneli:

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (Bd. 60, Jahrgang 1934, S. 902, referent Wielandt); i

Mathematical Reviews (Vol. 3, 1942, p. 36, referent Knebelman).

Ukoliko je to bilo moguće, koristili smo navedene referate da bismo osobine operacija *max* i *min* izneli što potpunije.

Poslednje dve relacije, vodeći računa o (4), postaju respektivno

$$(8)\qquad M = \max(A_1, \cdots, A_{p-k+1}) = A_{p-k+1},$$

$$(9)\qquad N = \min(A_k, \cdots, A_p) = A_k.$$

Izrazi M i N biće jednaki ako je

$$k = p - k + 1,$$

tj. kada je

$$p = 2k - 1,$$

što znači da je p neparan broj.

Prema tome, može se formulisati ovaj rezultat:

Teorema.[7] *Kada je p jedan neparan broj, tada p proizvoljnih brojeva $A_1, A_2, \cdots, A_p$, koji pripadaju skupu realnih brojeva, zadovoljavaju relaciju*

$$(10)\qquad \min\{\max(A_1, A_2, \cdots, A_k), \cdots, \max(A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \cdots, A_p)\}$$
$$= \max\{\min(A_1, A_2, \cdots, A_k), \cdots, \min(A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \cdots, A_p)\}$$

gde su operacije max *i* min *koje se javljaju u zagradama* { } *primenjene na sve kombinacije klase k $(k = (p+1)/2)$, obrazovane od p navedenih brojeva* (3).

Relacija (10) obuhvata, kao partikularni slučaj, poznatu relaciju (2). Zaista, ako se u (10) stavi $p = 3$, što povlači za sobom $k = 2$, dobija se relacija (2).

Za $p = 5$, $k = 3$ imamo ovu relaciju:

$$\begin{aligned} \min\{&\max(a,b,c), \max(a,b,d), \max(a,b,e), \max(a,c,d),\\ &\max(a,c,e), \max(a,d,e), \max(b,c,d),\\ &\max(b,c,e), \max(b,d,e), \max(c,d,e)\}\\ = \max\{&\min(a,b,c), \min(a,b,d), \min(a,b,e), \min(a,c,d),\\ &\min(a,c,e), \min(a,d,e), \min(b,c,d),\\ &\min(b,c,e), \min(b,d,e), \min(c,d,e)\}\end{aligned}$$

[7]) Ovu smo teoremu objavili u jednom kratkom članku koji je prikazan na sednici Akademije nauka u Parizu [5].

4. Analiziranjem relacija (8) i (9) dolazi se do ovih nejednakosti

$$(11) \qquad M > N$$

za $1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{p+1}{2}\right]$, gde je p prirodan paran broj,

za $1 \leqslant k < \frac{p+1}{2}$, gde je p prirodan neparan broj;

$$(12) \qquad M < N$$

za $\left[\frac{p+1}{2}\right] < k \leqslant p$, gde je p prirodan paran broj,

za $\frac{p+1}{2} < k \leqslant p$, gde je p prirodan neparan broj.

U ovim formulama $\left[\frac{p+1}{2}\right]$ znači najveći cèo broj sadržan u $\frac{p+1}{2}$.

5. Gore navedenu teoremu formulisali smo, pošto smo prethodno dokazali teoremu koja će niže biti navedena.

Posmatrajmo jedan skup M i njegove ma koje parcijalne skupove

$$(13) \qquad M_1, M_2, \cdots, M_n.$$

Iz skupa (13) izdvojimo p $(1 \leqslant p \leqslant n)$ proizvoljnih parcijalnih skupova M_i koje ćemo označiti sa

$$A_1, A_2, \cdots, A_p,$$

i od njih formirajmo sve kombinacije bez ponavljanja klase k $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Na taj način dobijamo $\binom{p}{k}$ skupova

$$(14) \qquad \begin{array}{c} \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \cdots, A_p\}. \end{array}$$

Primenom operacija $\wedge$ (*presek*) i $\vee$ (*unija*) na (14), možemo obrazovati dva nova skupa:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{array}{c} P_1 = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_s = A_{p-k+1} \wedge A_{p-k+2} \wedge \cdots \wedge A_p; \end{array}$$

$$
\text{(II)} \qquad
\begin{aligned}
Q_1 &= A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Q_s &= A_{p-k+1} \vee A_{p-k+2} \vee \cdots \vee A_p,
\end{aligned}
$$

gde je $s = \binom{p}{k}$.

Uzimajuči u obzir uvedene oznake, može se formulisati ova

Teorema. Kada je p *neparan broj,* $k = (p+1)/2$, $s = \binom{p}{k}$, *tada postoji jednakost*

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee \cdots \vee (A_{p-k+1} \wedge A_{p-k+2} \wedge \cdots \wedge A_p) \\
&= (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k) \wedge \cdots \wedge (A_{p-k+1} \vee A_{p-k+2} \vee \cdots \vee A_p),
\end{aligned}
$$

gde svaka strana jednakosti sadrži s *izraza između zagrada* ( ) *i gde je, na primer,* $A_1, A_2, \cdots, A_k$ *jedna od kombinacija klase* k *formiranih od* p *parcijalnih skupova jednog datog skupa* A.

Poslednja relacija sadrži, kao partikularni slučaj, Dedekind-ovu aksiomu[8])

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_3) \vee (A_2 \wedge A_3) \\
&= (A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_3) \wedge (A_2 \vee A_3).
\end{aligned}
$$

---

[8]) [8], str. 51; [9], str. 133, obrazac L 6; [10], str. 239, obrazac 8. Napomenimo da je Dedekind dao svoj uslov u obliku

$$(A+(B-C)) - (B+C) = (A-(B+C)) + (B-C),$$

gde su A, B, C tri ma kakva modula i gde
$A+B$ znači najveći zajednički delilac (suma=unija);
$A-B$ znači najmanji zajednički sadržalac (presek).
Oznake koje su sada u upotrebi praktičnije su.

D. S. Mitrinovitch

SUR LES OPÉRATIONS *MAX* ET *MIN*

(Résumé)

Après un bref aperçu des propriétés des opérations *max* et *min*, en partie connues[1]), on démontre dans cet article le résultat suivant:

Théorème I. I. *Si* p *présente un nombre naturel impair, les* p *nombres quelconques*

$$A_1, A_2, \cdots, A_p$$

appartenant à un ensemble fini des nombres réels, satisfont à la relation

$$\text{(1)} \qquad \min\left\{\max(A_1, A_2, \cdots, A_k), \cdots, \max(A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \cdots, A_p)\right\}$$

$$=\max\left\{\min(A_1, A_2, \cdots, A_k), \cdots, \min(A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \cdots, A_p)\right\}$$

où les opérations max *et* min *figurant en* $\{\ \}$ *sont appliquées à toutes les combinaisons* (sans répétitions) k *à* k $(k=(p+1)/2)$, *formées des* p *nombres* $A_1, A_2, \cdots, A_p$.

La relation (1) contient, comme cas particulier, la relation connue[2])

$$\min\left\{\max(A_1, A_2), \max(A_1, A_3), \max(A_2, A_3)\right\}$$

$$=\max\left\{\min(A_1, A_2), \min(A_1, A_3), \min(A_2, A_3)\right\}.$$

A la fin de l'article on signale un nouveau théorème grâce auquel on a formulé le théorème indiqué plus haut. Son énoncé est:

Théorème II. *Si* p *désigne un nombre naturel impair la relation*[3])

$$\text{(2)} \qquad (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee \cdots \vee (A_{p-k+1} \wedge A_{p-k+2} \wedge \cdots \wedge A_p)$$

$$=(A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k) \wedge \cdots \wedge (A_{p-k+1} \vee A_{p-k+2} \vee \cdots \vee A_p)$$

aura lieu toutes les fois que

$$k=(p+1)/2,\ s=\binom{p}{k}$$

chaque membre de l'égalité contenant les s *expressions entre* ( ), *où, par exemple,* $A_1, A_2, \cdots A_k$ *présente l'une des* s *combinaisons* (sans répétitions) k *à* k, *formées des* p *ensembles partiels* A_i *d'un ensemble donné* A.

Pour $p=3$, $k=2$, la relation (2) se réduit à

$$(A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_3) \vee (A_2 \wedge A_3)=(A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_3) \wedge (A_2 \vee A_3)$$

ce qui présente la relation de D e d e k i n d, appelé par O. O r e *l'axiome de Dedekind*.[4])

---

1) *Cf.* [4], p. 104; [6]; [7].

2) *Cf.* [4], p. 107.

3) $\wedge$=signe d'opération: l'intersection; $\vee$=signe d'opération: la réunion.

4) *Cf.* [8], p. 51; [9], p. 133, formule I. 6; [10], p. 239, formule 8.

LITERATURA — INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] G. Pólya — G. Szegö
Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I, Berlin, 1925, XVI+338 S.

[2] A. K. Сушкевич
Основы высшей алгебры, четвертое издание, ОГИЗ, Москва, 1941, 460 стр.

[3] A. Speiser
Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, dritte Auflage, New York (Dover Publications), 1943, X+262 S.

[4] O. Ore
Number Theory and its History, New York, 1948, X+370 p.

[5] D. S. Mitrinovitch
Sur une propriété des opérations max et min (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 232, 1951, sous presse).

[6] A. Suschkewitch
Über ein Elementensystem mit zwei Operationen, für welche zwei Distributivgesetze gelten (*Communications de l'Institut des Sciences mathématiques et mécaniques de l'Université de Kharkoff et de la Société mathématique de Kharkoff*, (4), t. 8, 1934, p. 29—32).

[7] M. Fedossejeff
Über einen Typus von Systemen mit zwei Operationen (*Communications de l'Institut des Sciences mathématiques et mécaniques de l'Université de Kharkoff et de la Société mathématique de Kharkoff*, (4), t. 18, 1940, p. 39—55).

[8] O. Ore
L'Algèbre abstraite, Actualités scientifiques et industrielles, fasc. 362, Paris, 1936, 52 p.

[9] G. Birkhoff
Lattice Theory, Revised Edition, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXV, New York, 1948, XIII+284 p.

[10] R. Dedekind
Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe (*Mathematische Annalen*, Bd. 53, 1900, S. 371—403).