Зборник на трудови од III конгрес
на математичарите на Македонија
Струга, Македонија, 29.IX-2.X-2005
Стр. 261-274

Proceedings of III congress
of mathematicians of Macedonia
Struga, Macedonia, 29.IX-2.X-2005
Pages 261-274

ОПИС НА КОНЕЧНО ГЕНЕРИРАНИ АДИТИВНИ ПОДГРУПИ ОД $\mathbb{Z}^n$

Магдалена Хаџи - Коста Јосифовска[1], Дончо Димовски[2]

Апстракт. Во оваа работа даден е опис на конечно генерирани адитивни подгрупи од $\mathbb{Z}^n$. Имено една подгрупа **G** од адитивната група $\mathbb{Z}^n$ е еднозначно карактеризирана со единствена целобројна квадратна матрица од ред n, која задоволува одредени услови. Броевите од кои е составена матрицата се наречени карактеристични броеви за подгрупата.

1. ВОВЕД

Во овој дел ќе формулираме неколку основни дефиниции и резултати потребни во натамошниот текст.

Нека $\mathbb{N} = \{ 0 , 1 , 2 , \ldots, n, \ldots \}$ е множество природни броеви заедно со нулата, **Z** множество на цели броеви, а $\mathbb{Z}^n$ е неговата n-димензионална решетка.

Едно подмножество K од групата H е **подгрупа** акко се исполнети условите :

(i) $\mathbf{x} , \mathbf{y} \in K \Rightarrow \mathbf{xy} \in K$,

(ii) $\mathbf{e} \in K$, $\mathbf{e}$ е единица на H ,

(iii) $\mathbf{x} \in K \Rightarrow \mathbf{x}^{-1} \in K$.

Ранг на комутативна група се нарекува бројот на слободни генератори . Нека H е комутативна група, рангот на H се означува со r (H) .

Дефиниција 1.1.

1.1.1. $\mathbf{M}_1 = M_{01} \bigcup M_{11} = \bigcup_{i=0}^{1} M_{i1}$, $M_{01} = \{ [0] \}$, $M_{11} = \{ [d] \mid d > 0 \}$.

1.1.2. $\mathbf{M}_2 = M_{02} \bigcup M_{12} \bigcup M_{22} = \bigcup_{i=0}^{2} M_{i2}$

$$M_{02} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid [a_{12}] \in \mathbf{M}_1 \right\},$$

$$M_{12} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a_{11} > 0 , a_{12} \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$M_{22} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{11} > 0 , a_{22} > 0 , 0 \le a_{12} < a_{22} \right\}.$$

1.1.3. $\mathbf{M}_3 = M_{03} \bigcup M_{13} \bigcup M_{23} \bigcup M_{33} = \bigcup_{i=0}^{3} M_{i3}$,

$$M_{03}=\left\{\begin{bmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & 0 & a_{23}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{23}\end{bmatrix}\in \mathbf{M}_2\right\},$$

$$M_{13}=\left\{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & 0 & a_{23}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}a_{11} & a_{13}\\ 0 & a_{23}\end{bmatrix}\in \mathbf{M}_2,\ a_{11}>0 \text{ и } a_{12}\in \mathbb{Z}\right\},$$

$$M_{23}=\left\{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}\in \mathbf{M}_2,\ a_{11}>0,\ a_{22}>0 \text{ и } a_{13},\ a_{23}\in \mathbb{Z}\right\},$$

$$M_{33}=\left\{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix} \mid a_{11},\ a_{22},\ a_{33}>0,\ \ 0\le a_{12}<a_{22},\ 0\le a_{13}<a_{33},\ \ 0\le a_{23}< a_{33}\right\}.$$

1.1.4. $\mathbf{M}_n = M_{0n}\bigcup M_{1n}\bigcup \ \ .\ .\ .\ \bigcup M_{nn} = \bigcup\limits_{i=0}^{n} M_{in}$, каде што :

$$(\mathrm{i})\quad M_{0n}=\left\{\left[\begin{array}{c|cccccc}0 & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & L & & & \\ . & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & . & . & . & 0 & \end{array}\right] \mid L\in \mathbf{M}_{n-1}\right\},$$

$$(\mathrm{ii})\ M_{in}=\left\{\left[\begin{array}{c|c|c} A_{i\times i} & \begin{matrix}a_{1,i+1}\\ .\\ .\\ .\\ a_{i,i+1}\end{matrix} & B_{i\times(n-i-1)}\\ \hline O_{(n-i-1)\times i} & \begin{matrix}0\\ .\\ .\\ .\\ 0\end{matrix} & C_{(n-i-1)\times(n-i-1)}\\ \hline 0\ .\ \ .\ \ .\ 0 & 0 & 0\ .\ \ .\ \ .\ 0\end{array}\right] \mid \begin{array}{l}\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & C\end{bmatrix}\in \mathbf{M}_{n-1},\\ a_{j,\,i+1}\in \mathbb{Z},\ \ (j=1,\dots,i)\\ a_{jj}>0,\ (j=1,\ .\ .\ .\ ,i).\end{array}\right\}$$

$$(iii)\ M_{nn} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} a_{jj} > 0 , (j = 1 , . . . , n) , \\ 0 \le a_{ij} < a_{jj} ,\ i < j , \\ a_{jj} = 0 \ , i > j \ , \\ i = 1 , . . . , n \ , \\ j = 2 , . . . , n \end{array} \right\} .$$

Класификацијата на подгрупите од адитивната група $\mathbb{Z}^n$ за n=1 и n=2 е позната. За n=1 во [1] е дадена класификација на подгрупите од адитивната група $\mathbb{Z}$, што е директна последица од својствата за најголем заеднички делител во множествата на природните и целите броеви, т.е. со Евклидовиот алгоритам. Докажана е следната теорема:

Теорема 1.1. [1] *Секоја адитивна подгрупа G од* $\mathbb{Z}$ *со позитивни и негативни броеви е група и постои некој број* ***m****, така што*

$$G = \{ mt \,/\, t \in \mathbb{Z} \}.$$

За n=2 во [4] се докажани следниве теореми:

Теорема 1.2. [4] *Нека G е конечно генерирана адитивна подгрупа од* $\mathbb{Z}^2$, *т.е.* $G := < \{ (x_{i1} , x_{i2}) \mid i = 1, . . . , s\} > = < (x_{11}, x_{12}) , (x_{21}, x_{22}), . . . , (x_{s1} , x_{s2})>$, ($s \in \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$).

Тогаш :

(i) Ако $r (G) = 0$ *, тогаш* $G = \{ (0 , 0) \}$.

(ii) Ако $r (G) = 1$*, тогаш* $G = \{ k (\mathbf{x} , \mathbf{y}) \,/ k \in \mathbb{Z}\}$ *за фиксно* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})\neq(0, 0)$.

(iii) Ако $r (G) = 2$ *, тогаш постојат* ***карактеристични броеви*** a_{11}, a_{12} *и* a_{22} *, што ги задоволуваат условите :* $a_{11} > 0$ *,* $a_{22} > 0$ *и* $0 \le a_{12} < a_{22}$ *, така што :*

$G = <(a_{11} , a_{12}) , (0 , a_{22}) >$

Теорема 1.3.[4] *За секоја подгрупа* $G \subseteq \mathbb{Z}^2$*, постои единствена матрица* $A \in \mathbf{M}_2$ *, така што* $G = < (a_{11} , a_{12}) , (0 , a_{22}) >$ *.*

2. ОПИС НА КОНЕЧНО ГЕНЕРИРАНИ АДИТИВНИ ПОДГРУПИ ОД $\mathbb{Z}^n$

Во овој дел е дадена класификација на подгрупите од адитивната група $\mathbb{Z}^n$(кои секогаш се конечно генерирани) , т.е. направено е обопштување на теоремите **Теорема 1.1.**,**Теорема 1.2**. и **Теорема 1.3.**

Теорема 2.1. *За секоја конечно генерирана адитивна подгрупа* $G \subseteq \mathbb{Z}^n$ *, постои единствена матрица* $A \in \mathbf{M}_n$ *, така што :*

$$G = < (a_{11} , a_{12} , . . . , a_{1n}) , (0 , a_{22} , . . . , a_{2n}), . . . , (0 , 0 , . . . , a_{nn}) >.$$

Доказ : Оваа својство ќе го докажеме со помош на индукција, која ќе ја спроведеме по бројот n .

Доказот на тврдењето за n = 1 , односно кога $G \subseteq \mathbb{Z}$ е изнесен во [1] ., односно тоа е **Теорема 1.1.** .

Доказот за случајот n = 2, $G \subseteq \mathbb{Z}^2$ е изнесен во [4], во теоремите : **Теорема 1.2.** и **Теорема 1.3.** .

Сега да претпоставиме дека тврдењето на **Теорема 2.1.** е точно за n ≤ k , т.е. за подгрупата $G \subseteq \mathbb{Z}^k$, генерирана со s вектори - генератори (s

$\in \mathbb{N} \setminus \{ 0 \})$, $G = < \{ (x_{i1} , x_{i2} , \ldots x_{ik}) \mid i = 1, \ldots , s \} > \subseteq \mathbb{Z}^k$, постои единствена матрица $A \in \mathbf{M}_k = \mathbf{M}_{n-1}$.

Треба да се докаже дека тврдењето е точно за $n = k +1$.

Нека ја разгледаме подгрупата $G \subseteq \mathbb{Z}^{k+1}$, генерирана со s вектори - генератори $(s \in \mathbb{N} \setminus \{ 0 \})$, т.е.

$G = < \{ (x_{i1} , x_{i2} , \ldots x_{i, k+1}) \mid i = 1, \ldots , s \} > =$

$= <(x_{11} , x_{12} , \ldots x_{1, k+1}), (x_{21} , x_{22} , \ldots x_{2, k+1}), \ldots , (x_{s1} , x_{s2} , \ldots x_{s, k+1}) > \subseteq \mathbb{Z}^{k+1}$.

Во **првиот дел**, ќе се задржиме на доказот за постоењето на матрицата A .

Може да ги разгледаме следните случаи :

1. Ако сите компоненти $x_{ij} = 0$ за $(i = 1, \ldots , s)$ и $(j = 1, \ldots , k +1)$, тогаш $r (G)= 0$ и $G = \{ \underbrace{(0, \ldots ,0)}_{k+1} \}$.

2. Ако сите $x_{i1} = 0$ за $(i = 1, \ldots , s)$, тогаш $G \subseteq 0 \times \mathbb{Z}^k$, $G = 0 \times G'$, каде $G' \subseteq \mathbb{Z}^k = \mathbb{Z}^{n-1}$. Според индуктивната претпоставка, подгрупата $G' \subseteq \mathbb{Z}^k$ е претставена со единствена матрица $X_{k \times k} \in \mathbf{M}_k = \mathbf{M}_{n-1}$.

Значи матрицата A е од видот :

$$A = \left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & X & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \hline 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{array}\right] = A_{(k+1) \times (k+1)} \in \mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{M}_n .$$

3. Нека постои i , така што $x_{i1} \neq 0$, $(i = 1, \ldots , s)$ и нека :

$a_{11} = НЗД (x_{11} , x_{12} , \ldots , x_{s1}) = НЗД (\{ x_{i1} \mid i = 1, \ldots , s \})$. (1)

Од дефиницијата и својствата на НЗД следува дека постојат константи $q_i , d_i \in \mathbb{Z}$, $(i = 1, \ldots , s)$, така што :

$x_{i1} = a_{11} q_i$, $(i = 1, \ldots , s)$, (2)

$$a_{11} = \sum_{i=1}^{s} d_i x_{i1} \quad \text{и}$$

$$\sum_{i=1}^{s} q_i d_i = 1 \quad .$$

Ги дефинираме следните броеви :

$$a'_{12} = \sum_{i=1}^{s} d_i x_{i2} \quad ,$$

$$a'_{13} = \sum_{i=1}^{s} d_i x_{i3} \quad , \qquad (3)$$

. . .

$$a'_{1,k+1} = a'_{1,n} = \sum_{i=1}^{s} d_i x_{i,k+1} = \sum_{i=1}^{s} d_i x_{i,n} .$$

Од горе наведените дефиниции на броевите a_{11} , a'_{12} , . . . , $a'_{1,k+1} = a'_{1,n}$ ((1), (2) и (3)) следува дека :

$(a_{11} , a'_{12} , \ldots , a'_{1,k+1} = a'_{1,n}) \in G$.

Ќе ги разгледаме следните разлики (елементи од видот) :

$(x_{i1} , x_{i2} , \ldots , x_{i,k+1}) - q_i \ (a_{11} , a'_{12} , \ldots , a'_{1,k+1}) =$

$= (x_{i1} - q_i \ a_{11} , \ x_{i2} - q_i \ a'_{12} , \ \ldots , \ x_{i,k+1} - q_i \ a'_{1,k+1}) =$

$= (q_i \ a_{11} - q_i \ a_{11} , \ x_{i2} - q_i \ a'_{12} , \ \ldots , \ x_{i,k+1} - q_i \ a'_{1,k+1}) =$

$= (0 , \ x_{i2} - q_i \ a'_{12} , \ \ldots , \ x_{i,k+1} - q_i \ a'_{1,k+1}), \quad (i = 1, \ldots , s).$ (4)

Ќе воведеме нови ознаки, кои ќе ги користиме понатаму . Нека е :

$x_{i2} - q_i \ a'_{12} = x'_{i2}$,

. . . ,

$x_{i,k+1} - q_i \ a'_{1,k+1} = x'_{i,k+1}$, $(i = 1, \ldots , s)$. (5)

Тогаш од (4) и (5) следува дека :

$(x_{i1} , x_{i2} , \ldots , x_{i,k+1}) - q_i (a_{11}, a'_{12} , \ldots, a'_{1,k+1}) = (0, x'_{i2} , \ldots , x'_{i,k+1}), (i = 1, \ldots , s)$. (6)

Од (6) следува дека $< \{ (0, x'_{i2} , \ldots , x'_{i,k+1}) \mid i = 1, \ldots , s\} > \subseteq G$.

Лема 2.1. $< \left(a_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{1,k+1}\right), \left\{\left(0, x'_{i2}, \ldots, x'_{i,k+1}\right) \mid i = 1, \ldots, s\right\} > = G$.

Доказ. Доказот на **Лема 2.1.** следува од (6) . Секој елемент - генератор на G, $(x_{i1} , x_{i2} , \ldots , x_{i,k+1})$, $(i = 1, \ldots , s)$, според (6) може да се претстави на следниот начин :

$(x_{i1} , x_{i2} , \ldots , x_{i,k+1}) = (0, x'_{i2} , \ldots , x'_{i,k+1}) + q_i \ (a_{11} , a'_{12} , \ldots \ a'_{1,k+1})$, $(i = 1, \ldots , s)$.

За подгрупата генерирана од елементите $(0, x'_{i2} , \ldots , x'_{i,k+1})$, $(i =1, \ldots , s)$, $G' = < \{ (0, x'_{i2} , \ldots , x'_{i,k+1}) \mid i = 1, \ldots , s\} > \subseteq G$ точно е следното тврдење :

Лема 2.2. Нека $G' = < \{ (0, x'_{i2} , \ldots , x'_{i,k+1}) \mid i = 1, \ldots , s\} > \subseteq G$ и $G'' = < \left\{\left(x'_{i2}, \ldots, x'_{i,k+1}\right) \mid i = 1, \ldots, s\right\} >$ тогаш $G' \cong G''$.

Бидејќи $G'' \subseteq Z^k$, според индуктивната претпоставка за подгрупата $G'' \subseteq Z^k$, постои единствена матрица $A_k \in \mathbf{M}_k$, така што $G'' = < A_k >$, каде $< A_k >$ ја означува подгрупата генерирана од вектор редиците на матрицата A_k.

Од лемите: **Лема 2.1.** и **Лема 2.2.** , следува дека постои матрица $A'_{k+1} = A'_n$, така што :

$$A'_n = A'_{k+1} = \begin{bmatrix} a_{11} & | & a'_{12} & . & . & . & a'_{1,k+1} \\ - & | & - & - & - & - & - \\ 0 & | & & & & & \\ . & | & & & & & \\ . & | & & & A_k & & \\ . & | & & & & & \\ 0 & | & & & & & \end{bmatrix},$$

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{22} & | & a_{23} & . & . & . & a_{2,k+1} \\ - & | & - & - & - & - & - \\ 0 & | & & & & & \\ . & | & & & & & \\ . & | & & & A_{k-1} & & \\ . & | & & & & & \\ 0 & | & & & & & \end{bmatrix},$$

$A_k \in \mathbf{M}_k$ и $G = < A'_n >$.

Матрицата $A'_n = A'_{k+1}$ може, но и не мора да припаѓа на $\mathbf{M}_{k+1}$. Заради тоа, во случаи кога $A'_{k+1} \notin \mathbf{M}_{k+1}$, таа треба да се трансформира (со поправка на елементите $a'_{12}, \ldots a'_{1,k+1}$) до матрица која припаѓа на $\mathbf{M}_{k+1}$, но притоа G да не се менува .

При трансформацијата на матрицата A'_{k+1} , можни се следните два случаи :

1. Ако $a_{22} > 0$, се врши поправка на елементите a'_{12} , a'_{13}, . . . , $a'_{1,k+1}$, со елементите a_{22} , . . . , $a_{2,k+1}$, на следниот начин : $\exists!\ r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_{12} < a_{22}$ така што $a'_{12} = r\ a_{22} + a_{12}$. Потоа , $a''_{1i} = a'_{1i} - ra_{2i}$, (i = 3 , . . . , k+1).

Матрицата A'_{k+1} , (е (k + 1) × (k + 1) матрица) , се трансформира во матрица :

$$A''_{k+1} = A''_{(k+1)\times(k+1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & | & a_{12} & | & a''_{13} & . & . & . & a''_{1,k+1} \\ - & | & - & | & - & - & - & - & - \\ 0 & | & a_{22} & | & a_{23} & . & . & . & a_{2,k+1} \\ - & | & - & | & - & - & - & - & - \\ . & | & . & | & & & & & \\ . & | & . & | & & & A_{k-1} & & \\ . & | & . & | & & & & & \\ 0 & | & 0 & | & & & & & \end{bmatrix},$$

$$A_{k-1} = A_{(k-1)\times(k-1)} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & . & . & . & a_{3,k+1} \\ 0 & a_{44} & . & . & . & a_{4,k+1} \\ . & . & & & & \\ . & . & & & & \\ . & . & & & & \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{k+1,k+1} \end{bmatrix} .$$

Нека ја разгледаме матрицата :

$$A''_k = \left[\begin{array}{c|ccccc} a_{11} & a''_{13} & . & . & . & a''_{1,k+1} \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & A_{k-1} & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right], \quad A''_k \text{ е } (\kappa \times \kappa) \text{ - матрица },$$

(добиена од матрицата A''_{k+1} со отфрлање на втората колона и втората редица). Од индуктивната претпоставка следува дека матрицата A''_k може да се трансформира во матрица A'''_k која припаѓа на $\mathbf{M}_k$. Со замена на матрицата A''_k со A'''_k и враќање на втората редица и втората колона, матрицата A'_{k+1} се трансформира во матрица A ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (n = k + 1) ,$$

$A \in \mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{M}_n$, која ја генерира подгрупата G, т.е. $G = \langle A \rangle$.

2. Ако е $a_{22} = 0$, матрицата $A'_{k+1} = A'_n$ е од видот :

$$A'_{k+1} = A'_n = \left[\begin{array}{c|c|ccccc} a_{11} & a'_{12} & a'_{13} & . & . & . & a'_{1,k+1} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & & & & & \\ . & . & & & & & \\ . & . & & & A_{k-1} & & \\ . & . & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{array}\right], \text{ каде што}$$

$$A_k = \left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & A_{k-1} & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{array}\right].$$

Тогаш $a'_{12} \in \mathbf{Z}$ и $a'_{12} = a_{12}$. Ќе ја разгледаме матрицата :

$$A'_k = \left[\begin{array}{c|ccccc} a_{11} & a'_{13} & . & . & . & a'_{1,k+1} \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & A_{k-1} & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right].$$

(Матрицата A'_k е (к × к) - матрица и е добиена од матрицата A'_{k+1} со отфрлање на втората колона и последната редица).

Од индуктивната претпоставка следува дека матрицата A'_k може да се трансформира во матрица која припаѓа на $\mathbf{M}_k$. Ако вака трансформираната матрица A'_k се замени во A'_{k+1} и се вратат втората колона и последната редица, матрицата A'_{k+1} се трансформира во матрица :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & | & a_{12} & | & a_{13} & . & . & . & a_{1,k+1} \\ - & | & - & | & - & - & - & - & - \\ 0 & | & 0 & | & & & & & \\ . & | & . & | & & & & & \\ . & | & . & | & & & A_{k-1} & & \\ . & | & . & | & & & & & \\ 0 & | & 0 & | & & & & & \\ - & | & - & | & - & - & - & - & - \\ 0 & | & 0 & | & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix},$$

$A \in \mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{M}_n$, која ја генерира подгрупата G.

Лема 2.3. Нека G е подгрупа од Z^k и нека е генерирана со елементи - генератори :

$$< (\mathbf{x}_1 , a_1 , \mathbf{y}_1) , \ldots , (\mathbf{x}_n , a_n , \mathbf{y}_n) > = G \quad \text{и} \qquad (7)$$

$$< (\overline{\mathbf{x}_1} , \overline{a_1} , \overline{\mathbf{y}_1}) , \ldots (\overline{\mathbf{x}_m} , \overline{a_m} , \overline{\mathbf{y}_m}) > = G \qquad (8)$$

Тогаш, за $G' =< (\mathbf{x}_1 , \mathbf{y}_1) , \ldots , (\mathbf{x}_n , \mathbf{y}_n) >$ и $G'' =< (\overline{\mathbf{x}_1} , \overline{\mathbf{y}_1}) , \ldots , (\overline{\mathbf{x}_m} , \overline{\mathbf{y}_m}) >$, важи $G' = G''$.

Доказ : Нека $\mathbf{z} = \alpha_1 (\mathbf{x}_1 , \mathbf{y}_1) + \ldots + \alpha_n (\mathbf{x}_n , \mathbf{y}_n) \in G'$; $(\alpha_1 , \ldots , \alpha_n \in Z)$. Од (7) и (8) следува дека : $\alpha_1(\mathbf{x}_1 , a_1 , \mathbf{y}_1) + \ldots + \alpha_n (\mathbf{x}_n , a_n , \mathbf{y}_n) \in G'$, па според тоа постојат константи $\beta_1 , \ldots , \beta_m \in Z$ така што :

$\alpha_1 (\mathbf{x}_1 , a_1 , \mathbf{y}_1) + \ldots + \alpha_n (\mathbf{x}_n , a_n , \mathbf{y}_n) = \beta_1(\overline{\mathbf{x}_1} , \overline{a_1} , \overline{\mathbf{y}_1}) + \ldots + \beta_m(\overline{\mathbf{x}_m} , \overline{a_m} , \overline{\mathbf{y}_m})$.

Тогаш : $\alpha_1 (\mathbf{x}_1 , \mathbf{y}_1) + \ldots + \alpha_n (\mathbf{x}_n , \mathbf{y}_n) = \mathbf{z} = \beta_1 (\overline{\mathbf{x}_1} , \overline{\mathbf{y}_1}) + \ldots + \beta_m(\overline{\mathbf{x}_m} , \overline{\mathbf{y}_m})$, од што следува дека $z \in G''$. Значи $G' \subseteq G''$.

Симетрично, $G'' \subseteq G'$. Според тоа $G' = G''$.

Во **вториот дел** останува да се покаже дека матрицата A е **единствена**. Нека претпоставиме дека постојат матрици A , $\overline{A} \in \mathbf{M}_n$, и нека :

$<(a_{11} , a_{12} , \ldots , a_{1n}) , (0 , a_{22} , \ldots , a_{2n}), \ldots , (0 , 0 , \ldots , a_{nn})> =$

$= < (\overline{a_{11}}, \overline{a_{12}} , \ldots , \overline{a_{1n}}) , (0 , \overline{a_{22}} , \ldots , \overline{a_{2n}}), \ldots , (0 , 0 , \ldots , \overline{a_{nn}}) >$

(9)

1. Ако $a_{11} = 0$, тогаш од тоа што матрицата $A \in \mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{M}_n$ и од **Дефиниција 1.1.4.(i)** , следува дека $a_{jj} = 0$, (j = 2, . . . , n). Значи матрицата A е од видот :

$$A = \left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & X & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \hline 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{array}\right], \quad X \in \mathbf{M}_k = \mathbf{M}_{n-1}.$$

Од равенството (9) следува дека $\overline{a_{11}} = \alpha_1 a_{11}$. Бидејќи $a_{11} = 0$, тогаш и $\overline{a_{11}} = 0$. Меѓутоа, матрицата $\overline{A} \in \mathbf{M}_n = \mathbf{M}_{k+1}$ и од **Дефиниција 1.1.4. (i)** следува дека $\overline{a_{jj}} = 0$, (j = 2, . . . , n). Тогаш матрицата $\overline{A}$ е од видот :

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & \overline{X} & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \hline 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{array}\right], \quad \overline{X} \in \mathbf{M}_{n-1} = \mathbf{M}_k.$$

Во овој случај, подгрупата $G \subseteq 0 \times \mathbb{Z}^k$, $G = 0 \times G'$, каде $G' \subseteq \mathbb{Z}^k$. Подгрупата G' е претставена со матриците X и $\overline{X}$ (X, $\overline{X} \in \mathbf{M}_{n-1}$) . Според индуктивната претпоставка за матриците X и $\overline{X}$ важи $\overline{X} = X$, т.е. $G' = < X > = < \overline{X} >$. Значи $A = \overline{A}$.

2. Ако за секое i , $i \in \{ 1 , . . . , n = k + 1 \}$, $a_{ii} > 0$, од **Дефиниција 1.1.4. (iii)** следува дека $\overline{a_{ii}} > 0$. Најпрво ќе покажеме дека $\overline{a_{ii}} = a_{ii}$.

Од равенството :

$$\begin{aligned}
(0 , . . . , 0 , \overline{a_{ii}} , \overline{a_{i,i+1}} , . . . , \overline{a_{i,n}}) = \\
&= \alpha_1 (a_{11} , a_{12} , . . . , a_{1,i-1} , a_{1i} , a_{1,i+1} , . . . , a_{1,n}) + \\
&+ \alpha_2 (0 , a_{22} , . . . , a_{2,i-1} , a_{2i} , a_{2,i+1} , . . . , a_{2,n}) + \\
&+ . . . \\
&+ \alpha_{i-1} (0 , 0 , . . . , a_{i-1,i-1} , a_{i-1,i} , a_{i-1,i+1} , . . . , a_{i-1,n}) + \\
&+ \alpha_i (0 , 0 , . . . , 0 , a_{ii} , a_{i,i+1} , . . . , a_{i,n}) + \\
&+ . . . \\
&+ \alpha_n (0 , 0 , ... , a_{nn}) , \qquad \alpha_1 , . . . , \alpha_n \in \mathbb{Z} ,
\end{aligned}$$

следува дека : $\alpha_t = 0$, t = 1, . . . , i - 1 и $\overline{a_{ii}} = \alpha_i a_{ii}$.

Дуално се добива дека $a_{ii} = \beta_i \overline{a_{ii}}$, $\beta_i \in \mathbb{Z}$. Од последните две равенства , следува дека $\alpha_t \beta_t = 1$, т.е. $\alpha_t = \beta_t = \pm 1$.

Ако е $\beta_t = -1$, се добива дека $a_{tt} < 0$, што е противречност. Значи $\alpha_i = \beta_i = 1$ и $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$, (i = 1, . . . , n) .

Во овој случај, останува да се докаже дека и елементите од видот $a_{t-j,t}$ и $\overline{a_{t-j,t}}$, $(t = 1, \ldots, n)$, $j < t$ се еднакви.

Нека $a_{t-j,t} = \overline{a_{t-j,t}}$, $j = 1, \ldots, \ell$, $\ell < t$.

Доказот ќе го изведиме со математичка индукција по j.

За j = 1 , од равенството :

$$(0, \ldots, 0_{t-2}, a_{t-1,t-1}, a_{t-1,t}, a_{t-1,t+1}, \ldots, a_{t-1,n}) =$$
$$= \alpha_1 (a_{11}, \ldots, a_{1,t-2}, a_{1,t-1}, \overline{a_{1,t}}, \overline{a_{1,t+1}}, \ldots, \overline{a_{1,n}}) +$$
$$+ \ldots$$
$$+ \alpha_{t-1} (0, \ldots, 0_{t-2}, a_{t-1,t-1}, \overline{a_{t-1,t}}, \overline{a_{t-1,t+1}}, \ldots, \overline{a_{t-1,n}}) +$$
$$+ \alpha_t (0, \ldots, 0, 0_{t-1}, a_{tt}, \overline{a_{t,t+1}}, \ldots, \overline{a_{t,n}}) +$$
$$+ \ldots \quad , \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z},$$

директно следува дека : $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\ell = 0$; $(1 \le \ell < t-1)$ и $\alpha_{t-1} = 1$.

Од истото равенство следува дека $a_{t-1,t} = 1 \cdot \overline{a_{t-1,t}} + \alpha_t a_{tt}$.

Дуално, се добива дека :

$$\overline{a_{t-1,t}} = 1 \cdot a_{t-1,t} + \beta_t a_{tt}.$$

Од последните две равенства, (со замена) се добива дека $\alpha_t + \beta_t = 0$. Бидејќи $a_{t-1,t} < a_{tt}$, следува $\alpha_t \le 0$. Од овие два услова ($\alpha_t + \beta_t = 0$ и $\alpha_t \le 0$) , следува дека $\alpha_t = \beta_t = 0$. Тоа значи дека $a_{t-1,t} = \overline{a_{t-1,t}}$.

Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $j = 1, \ldots, \ell$; $\ell < t$.

Треба да докажеме дека тврдењето е точно за $j = \ell + 1$. За таа цел ќе го користиме следното равенство :

$$(0, \ldots, 0_{t-\ell-2}, a_{t-\ell-1,t-\ell-1}, a_{t-\ell-1,t-\ell}, \ldots, a_{t-\ell-1,t}, \ldots) =$$
$$= \alpha_1 (a_{11}, \ldots, a_{1,t-\ell-2}, a_{1,t-\ell-1}, a_{1,t-\ell}, \ldots, \overline{a_{1,t}}, \ldots) +$$
$$+ \alpha_2 (0, a_{22}, \ldots, a_{2,t-\ell-2}, a_{2,t-\ell-1}, a_{2,t-\ell}, \ldots, \overline{a_{2,t}}, \ldots) +$$
$$+ \ldots$$
$$+ \alpha_{t-\ell-1} (0, \ldots, 0, a_{t-\ell-1,t-\ell-1}, a_{t-\ell-1,t-\ell}, \ldots, \overline{a_{t-\ell-1,t}}, \ldots) +$$
$$+ \alpha_{t-\ell} (0, \ldots, 0, a_{t-\ell,t-\ell}, \ldots, \overline{a_{t-\ell,t}}, \ldots) +$$
$$+ \ldots$$
$$+ \alpha_t (0, \ldots, 0_{t-1}, \overline{a_{tt}}, \ldots) +$$
$$+ \ldots \quad . \qquad (10)$$

Од ова равенство следува дека :

1. $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{t-\ell-2} = 0$,
2. $\alpha_{t-\ell-1} = 1$,
3. $a_{t-\ell-1,t-\ell} = 1 \cdot a_{t-\ell-1,t-\ell} + \alpha_{t-\ell} a_{t-\ell,t-\ell}$.

Бидејќи $a_{t-\ell,t-\ell} > 0$, од последното равенство (3) , следува дека $\alpha_{t-\ell} = 0$.

Во продолжение, со примена на математичка индукција ќе покажеме дека константите од видот $\alpha_{t-\ell+f} = 0$, за $f = 0, 1, \ldots, \ell$. Индукцијата ќе ја спроведеме по индексот f.

Ова тврдење е точно за f = 0, што следува од погоре изнесеното.

Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $f = 0, \dots, \ell - 1$, треба да докажеме дека тврдењето е точно за $f = \ell$.

Од равенството (10) следува дека:

$$a_{t-\ell-1,t} = 1 \cdot \overline{a}_{t-\ell-1,t} + \alpha_t\, a_{tt}. \qquad (11)$$

Дуално, се добива дека:

$$\overline{a}_{t-\ell-1,t} = 1 \cdot a_{t-\ell-1,t} + \beta_t\, a_{tt}. \qquad (12)$$

Од равенствата (11) и (12) (со замена) се добива дека $\alpha_t + \beta_t = 0$. Бидејќи $a_{t-\ell-1,t} < a_{tt}$, од равенството (11) следува $\alpha_t \le 0$. Од условите: $\alpha_t + \beta_t = 0$ и $\alpha_t \le 0$, следува дека $\alpha_t = \beta_t = 0$, т.е. дека $\alpha_{t-\ell+f} = 0$, за $f = 0, \dots, \ell$; $\ell < t$.

Со тоа покажавме дека:

$$a_{t-\ell-1,t} = \overline{a}_{t-\ell-1,t}, \text{ за } j = \ell + 1,$$

односно дека $a_{t-j,t} = \overline{a}_{t-j,t}$; $j = 1, \dots, \ell$; $\ell < t$.

Значи добивме дека $A = \overline{A}$.

3. Нека A и $\overline{A}$ се матрици со кои може да биде претставена подгрупата G, така што $A, \overline{A} \in \mathbf{M}_n$ и $a_{jj} > 0$, $j = 1, \dots, i$ и $a_{i+1,i+1} = 0$, (т.е. ако после некое i како дијаогонален елемент $a_{i+1,i+1}$ се јавува 0).

Во првиот дел од **2.** покажавме дека $a_{jj} = \overline{a}_{jj}$, $j = 1, \dots, i$.

Ќе покажеме дека ако $a_{i+1,i+1} = 0$, тогаш и $\overline{a}_{i+1,i+1} = 0$.

Од равенството (9) следува дека:

$$\begin{aligned}(0, \dots, 0, \overline{a}_{i+1,i+1}, \dots,) = {} & \alpha_1 (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1i}, a_{1,i+1}, \dots, a_{1,n}) + \\ & + \alpha_2 (0, a_{22}, \dots, a_{2i}, a_{2,i+1}, \dots, a_{2,n}) + \\ & + \dots \\ & + \alpha_i (0, 0, \dots, a_{ii}, 0, \dots, a_{i,n}) + \\ & + \alpha_{i+1} (0, 0, \dots, 0, 0, \dots, a_{i+1,n}) + \\ & + \dots ,\end{aligned}$$

каде $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, n = k + 1$. (13)

Од (13) се добива дека: $\alpha_j = 0$ за $(j = 1, \dots, i)$ и $\overline{a}_{i+1,i+1} = \alpha_{i+1}\, 0$, од каде следува дека и $\overline{a}_{i+1,i+1} = 0$. Тогаш матриците A и $\overline{A}$ се од видот:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} & a_{1,i+1} & \\ & \cdot & \\ Y_{i\times i} & \cdot & B_{i\times(n-i-1)} \\ & \cdot & \\ & a_{i,i+1} & \\ \hline & 0 & \\ & \cdot & \\ O_{(n-i-1)\times i} & \cdot & S_{(n-i-1)\times(n-i-1)} \\ & \cdot & \\ & 0 & \\ \hline 0 \;\; . \;\; . \;\; . \;\; 0 & 0 & 0 \;\; . \;\; . \;\; . \;\; 0 \end{array}\right], \quad Q = \begin{bmatrix} Y & B \\ 0 & S \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{n-1} = \mathbf{M}_k$$

$a_{jj} > 0$, $(j = 1, \dots, i)$.
$a_{j,i+1} \in \mathbb{Z}$, $(j = 1, \dots, i)$
.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} & \overline{a_{1,i+1}} & \\ & . & \\ Y_{i\times i} & . & \overline{B}_{i\times(n-i-1)} \\ & . & \\ & \overline{a_{i,i+1}} & \\ \hline & 0 & \\ & . & \\ \overline{O}_{(n-i-1)\times i} & . & \overline{S}_{(n-i-1)\times(n-i-1)} \\ & . & \\ & 0 & \\ \hline 0\ .\ \ .\ \ .\ 0 & 0 & 0\ .\ \ .\ \ .\ 0 \end{array}\right], \quad \begin{array}{l} \overline{Q} = \begin{bmatrix} Y & \overline{B} \\ \overline{0} & \overline{S} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_k \\ = \mathbf{M}_{n-1} \\ \overline{a_{jj}} > 0,\ (j = 1, \dots, i) \\ \boxed{} \in \mathbb{Z}, (j = 1, \dots, i). \end{array}$$

Од друга страна, според **Лема 2.3.** , матриците Q и $\overline{Q}$ (Q , $\overline{Q} \in \mathbf{M}_k = \mathbf{M}_{n-1}$) се еднакви т.е. $Q = \overline{Q}$. Тогаш матрицата $\overline{A}$ е од видот :

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} & \overline{a_{1,i+1}} & \\ & . & \\ Y & . & B \\ & . & \\ & \overline{a_{i,i+1}} & \\ \hline & 0 & \\ & . & \\ O & . & S \\ & . & \\ & 0 & \\ \hline 0\ .\ \ .\ \ .\ 0 & 0 & 0\ .\ \ .\ \ .\ 0 \end{array}\right], \qquad \begin{bmatrix} Y & B \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & \overline{B} \\ \overline{0} & \overline{S} \end{bmatrix}.$$

Останува да се покаже еднаквоста на елементите $a_{j,i+1}$ и $\overline{a_{j,i+1}}$; j = 1, . . . , i . За таа цел ќе го користиме следното равенство :

$(0 , \dots , 0_{j-1} ,\ a_{jj} ,\ a_{j,j+1} , \dots , a_{j,i} ,\ a_{j,i+1},\ a_{j,i+2} , \underline{\dots) =}$

$= \alpha_1 (a_{11} , \dots , a_{1,j-1} ,\ a_{1j} , a_{1,j+1} , \dots , a_{1,i} ,\ \overline{a_{1,i+1}} , a_{1,i+2} , \dots) +$

$+ \dots$

$+ \alpha_{j-1} (0 , \dots , a_{j-1,j-1} ,\ a_{j-1,j} ,\ a_{j-1,j+1} , \dots , a_{j-1,i} ,\ \overline{a_{j-1,i+1}} , a_{j-1,i+2} , \dots)$
$+$

$+ \alpha_j (0 , \dots , 0_{j-1} ,\ a_{j,j} ,\ a_{j,j+1} , \dots , a_{j,i} ,\ \overline{a_{j,i+1}} ,\ a_{j,i+2} , \dots) +$

$+ \alpha_{j+1} (0 , \dots , 0 ,\ 0_j ,\ a_{j+1,j+1} , \dots , a_{j+1,i} ,\ \overline{a_{j+1,i+1}} ,\ a_{j+1,i+2} , \dots) +$

$+ \dots$

$+ \alpha_{i-1} (0 , \dots , a_{i-1,i-1} ,\ a_{i-1,i} , \overline{a_{i-1,i+1}} ,\ a_{i-1,i+2} , \dots) +$

$+ \alpha_i (0 , \dots , 0_{i-1} ,\ a_{i,i} ,\ \overline{a_{i,i+1}} ,\ a_{i,i+2} , \dots) +$

$+ \alpha_{i+1} (0 , \dots , 0 ,\ 0_i ,\ 0_{i+1} ,\ a_{i+1,i+2} , \dots) +$

$+ \; . \; . \; .$, за $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, n$ (14)

Од (14) следува дека :

(i) $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_{j-1} = 0$,

(ii) $a_{jj} = \alpha_j \, a_{jj}$, т.е. $\alpha_j = 1$.

Ќе покажеме дека броевите $\alpha_{j+m} = 0$, за $m = 1, \ldots, i - j$, $j < i$. Доказот ќе го направиме со математичка индукција по m , ($m = 1, \ldots, i - j$) .

За $m = 1$, од равенството (14) следува дека :

$a_{j,j+1} = 1 \cdot a_{j,j+1} + \alpha_{j+1} \, a_{j+1,j+1}$, т.е. $\alpha_{j+1} = 0$.

Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $m \leq i - j - 1$, т.е. дека $\alpha_{j+(i-j-1)} = \alpha_{i-1} = 0$. Ќе покажеме дека тврдењето е точно за $m = i - j$.

Од равенството (14) следува дека :

$$a_{j,i} = \alpha_i \, a_{ii} + \alpha_{i-1} \, a_{i-1,i} + \ldots + \alpha_{j+1} \, a_{j+1,i} + \alpha_j \, a_{j,i} + \alpha_{j-1} \, a_{j-1,i} + \ldots + \alpha_{1,i} \, .$$

Од она што е претходно кажано се добива дека :

$a_{j,i} = \alpha_i \, a_{ii} + a_{j,i}$, од каде следува дека $\alpha_i = 0 = \alpha_{j+(i-j)}$.

Останатите броеви $\alpha_{i+1} = 0$, што директно следува од равенството (14) .

На крајот се добива дека :

$$a_{j,i+1} = \alpha_i \overline{a_{i,i+1}} + \alpha_{i-1} \overline{a_{i-1,i+1}} + \ldots + \alpha_{j+1} \overline{a_{j+1,i+1}} + \alpha_j \overline{a_{j,i+1}} + \alpha_{j-1} \overline{a_{j-1,i+1}} + \ldots + \alpha_1 \overline{a_{1,i+1}} \, .$$

Од каде следува дека :

$a_{j,i+1} = \alpha_j \, \overline{a_{j,i+1}}$,

т.е. бидејќи $\alpha_j = 1$, следува дека : $\overline{a_{j,i+1}} = a_{j,i+1}$, $a_{j,i+1} \in \mathbb{Z}$.

Значи добивме и во овој случај дека $A = \overline{A}$. ◘

ЛИТЕРАТУРА

[1] Димовски Д., *Адитивни полугрупи на цели броеви*, МАНУ, Скопје, Прилози, IX, 2, (1977).

[2] Хаџи - Коста Јосифовска М. , *Многустрани конуси во решетката* $\mathbb{N}^n$ *(со примена во целобројното програмирање и адитивните потполугрупи од вектори од* $\mathbb{N}^n$), докторска дисертација, Скопје, 2000.

[3] Димовски Д., Хаџи - Коста Јосифовска М., *Конечно генерирани потполугрупи од адитивната полугрупа* $\mathbb{N}^n$, Mathematica Macedonica, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Скопје, 2003.

[4] Хаџи - Коста Јосифовска М., Димовски Д., *Опис на конечно генерирани адитивни подгрупи од* $\mathbb{Z}^2$, Зборник на трудови 2001-Технички Факултет - Битола.

[1]Технички факултет - Битола, 7000 Битола, Македонија
E-mail Address: magdalena.josifovska@uklo.edu.mk
[2]Природно-математички факултет, 1000 Скопје, Македонија
E-mail Address: donco@iunona.pmf.ukim.edu.mk