Зборник на трудови од III конгрес
на математичарите на Македонија
Струга, Македонија, 29.IX-2.X-2005
Стр. 275-284

Proceedings of III congress
of mathematicians of Macedonia
Struga, Macedonia, 29.IX-2.X-2005
Pages 275-284

СЛОБОДНИ ПОТПОЛНО КОМУТАТИВНИ ВЕКТОРСКО ВРЕДНОСНИ ГРУПИ СО ЕДИНИЦА

Маријана Спиркоска[1] , Биљана Јанева[2]

Во трудот [1] се разгледувани единици во потполно комутативни векторско вредносни групи. Во овој труд е дадена конструкција на слободни потполно комутативни векторско вредносни групи со единица. Разгледани се два случаи и тоа: кога $m \geq k$ и $m < k$.

1. ВОВЕД

Најнапред ќе дадеме некои ознаки и дефиниција на поими што ќе се користат во понатамошниот текст.

1. Со Q^s ќе се означува s-тит Декартов производ на множеството Q.

2. Елементите на Q^s т.е. s-торките $(a_1, a_2, ..., a_s)$ ќе бидат означувани со $a_1 a_2 ... a_s$, или со a_1^s. Во некои случаи, каде нема можност за недоразбирање s-торките $(a_1, a_2, ..., a_s)$ ќе бидат означувани со една променлива, често подвлечена: $\underline{a}$. Значи симболите $(a_1, a_2, ..., a_s)$; $a_1 a_2 ... a_s$; a_1^s; $\underline{a}$ ќе бидат ознаки за еден ист елемент од Q^s.

3. Со a_i^j ќе се означува низата $a_i a_{i+1} ... a_j$ кога $i \leq j$, а празната низа кога $i > j$.

4. Ако $a_1 = a_2 = ... = a_s = a$, тогаш низата $a_1 a_2 ... a_s$ ќе се означува со $\overset{s}{a}$ или со a^s.

5. Ако S е непразно множество, тогаш со S^+ ќе го означуваме множеството од сите конечни низи на елементи од S т.е. $S^+ = \{a_1 a_2 ... a_i \mid i \geq 1, a_\nu \in S\}$ и уште ако $a_\mu, b_\nu \in S$, $i, j \geq 1$, тогаш $a_1 a_2 ... a_i = b_1 b_2 ... b_j$ ако и само ако $i = j$, $a_\nu = b_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}_i$.

6. Со $S^{(+)} = \bigcup_{r \geq 1} S^{(r)}$ ќе биде означена слободната комутативна полугрупа со база S. Значи ако $a_\mu, b_\nu \in S$, $i, j \geq 1$, тогаш во $S^{(+)}$ важи: $a_1 a_2 ... a_i = b_1 b_2 ... b_j$ ако и само ако $i = j$ и $b_1, b_2, ..., b_i$ е пермутација на $a_1, a_2, ..., a_i$.

7. Со $S^{(*)} = S^{(+)} \cup \{\mathbf{1}\}$, $\mathbf{1} \notin S$, ќе биде означен слободниот комутативен моноид со база S, каде што $\mathbf{1}$ е празниот збор.

Дефинираме хомоморфизам $|\;|: S^{(*)} \to \mathbb{N}_0$, кој ќе го викаме **должина,** на следниот начин:

$|\mathbf{1}| = 0$; $|x| = 1$ за $x \in S$; $|xy| = |x| + |y|$.

Нека Q е непразно множество. Како шта е дадено погоре со $Q^{(+)}$ ја означуваме слободната комутативна полугрупа со база Q. Ако r е позитивен цел број, со $Q^{(r)}$ ќе го означиме подмножеството $\{a_1 ... a_r | a_i \in Q\}$ од $Q^{(+)}$, при што $a_1 ... a_r$ е производ на $a_1,...,a_r$ во $Q^{(+)}$. И овде ќе ја користиме ознаката a_1^r наместо $a_1 ... a_r$, водејќи сметка дека $a_1^r = b_1^r$ во $Q^{(r)}$, за $a_i, b_i \in Q$, ако и само ако $b_1,...,b_r$ е пермутација на $a_1,...,a_r$. Јасно, ако $u \in S^{(r)} \subset S^{(+)}$, тогаш $|u| = r$.

Нека $n, m \in \mathbb{N}$. За пресликувањето $f: Q^{(n)} \to Q^{(m)}$ велиме дека е **потполно комутативна *(n,m)*-операција на Q,** или кога не е потребно да се истакнат *m* и *n,* **потполно комутативна векторско вредносна операција**, а за паротот $(Q; f)$ дека е **потполно комутативен *(n,m)*-групоид** (**потполно комутативен векторско вредносен групоид**).

Нека $n - m = k \geq 1$. Ако за потполно комутативниот *(n,m)*-групоид $(Q; f)$ важи и следното својство:

$$f\left(f\left(x_1^n\right)x_{n+1}^{n+k}\right) = f\left(f\left(x_2^{n+1}\right)x_{n+2}^{n+k}x_1\right),$$

тогаш за $(Q; f)$ велиме дека е **потполно комутативна *(n,m)*-полугрупа.**

Нека $(Q; f)$ е потполно комутативна *(n,m)*-полугрупа. Велиме дека $(Q; f)$ е **потполно комутативна *(n,m)*-група** ако за секои $a \in Q^{(k)}$, $b \in Q^{(m)}$, равенката $f(ax) = b$ има решение во $x \in Q^{(m)}$.

2. ЕДИНИЦИ ВО ПОТПОЛНО КОМУТАТИВНИ *(m + k, m)* - ГРУПИ

Нека *f*: $G^{(m+k)} \to G^{(m)}$ ги задоволува следните услови :

(i) $f(x_1^i f(x_{i+1}^{i+n})x_{i+n+1}^{n+k}) = f(f(x_1^n)x_{n+1}^{n+k}), \quad 1 \leq i \leq k,$

каде $n = m + k$ и $x_1,...,x_{n+k} \in G,$

(ii) постои елемент $e \in G$, кој ќе го викаме **единица**, така што за кои било $x_1,...,x_m \in G$

$$f(x_1^m e^k) = x_1^m;$$

(iii) за кои било $a_1,...,a_k, b_1,...,b_m \in G$ равенката

$$f(a_1^k x_1^m) = b_1^m$$

има решение $x_1,...,x_m$ (единствено до пермутација).

Тогаш за *(G,f)* ќе велиме дека е **потполно комутативна *(m + k, m)* - група со единица.**

Условот *(ii)* може да се замени со следниот послаб услов :

(ii') Постојат $e, x_1,...,x_m \in G,$ така што

$$f(x_1^m e^k) = x_1^m.$$

Доказот на ова тврдење е даден во [1].

Тврдење 2.1. Нека *f*: $G^{(m+k)} \to G^{(m)}$ ги задоволува следните услови :

(a) $f(x_1^i f(x_{i+1}^{i+n}) x_{i+n+1}^{n+k}) = f(f(x_1^n) x_{n+1}^{n+k}), \quad 1 \le i \le k,$

каде $n = m + k$ и $x_1, ..., x_{n+k} \in G,$

(b) постои елемент $e \in G$, така што за било кои $x_1, ..., x_m \in G$

$$f(x_1^m e^k) = x_1^m$$

(c) за било кои $a_1, ..., a_k \in G$, постојат $x_1, ..., x_m \in G$ (единствени до пермутација) така што

$$f(a_1^k x_1^m) = e^k.$$

Тогаш *(G,f)* е потполно комутативна *(m + k, m)* - група со единица.

Доказ: Треба да докажеме еквивалентност на *(iii)* и *(c)*.

Нека важи *(iii)*. Тогаш, ако специјално избереме $b_1^m = e^m$ се добива *(c)*.

Обратно, нека важи *(c)*. Нека $a_1^k \in G^{(k)}$ и $b_1^m \in G^{(m)}$. Нека *l* е најмалиот ненегативен цел број таков што *lk≥m*. Тогаш

$$b_1^m = f(b_1^m e^k) = f\big(f(b_1^m e^k)e^k\big) = f^{(2)}(b_1^m e^{2k}) = ... = f^{(l)}(b_1^m e^{lk}) =$$
$$= f^{(l)}(b_1^m e^{lk-m} e^m) \overset{(c)}{=} f^{(l)}(b_1^m e^{lk-m} f(a_1^k x_1^m)) = f^{(l+1)}(b_1^m e^{lk-m} a_1^k x_1^m) =$$
$$= f(a_1^k f^{(l)}(b_1^m e^{lk-m} x_1^m)) = f(a_1^k y_1^m).\blacksquare$$

Тврдење 2.2. Ако $k \le m$ и (G, f) е потполно комутативна *(m + k, m)*- група со единица *e,* тогаш елементот *e* е единствен.

Доказ: Да претпоставиме дека $k \le m$ и (G, f) е потполно комутативна *(m + k, m)* група со единици *e* и *e'*. Тогаш за *k<m*

$$f(x_1^{m-k}, \underbrace{e,...,e}_{k}, \underbrace{e',...,e'}_{k}) = (x_1^{m-k}, \underbrace{e,...,e}_{k})$$

и

$$f(x_1^{m-k}, \underbrace{e,...,e}_{k}, \underbrace{e',...,e'}_{k}) = (x_1^{m-k}, \underbrace{e',...,e'}_{k})$$

е точно за произволни $x_1, ..., x_{m-k}$. А ова е можно само ако *e = e'*.

За *k=m* имаме:

$$(\underbrace{e,...,e}_{m}) = f(\underbrace{e,...,e}_{m}, \underbrace{e',...,e'}_{m}) = (\underbrace{e',...,e'}_{m})$$

од каде следува *e = e'*. ■

Ако $k > m$ и (G, f) е потполно комутативна *(m+k, m)*-група со единица *e,* тогаш елементот *e* може да не е единствен. Тоа може да се види од следниот пример даден во [1]:

Пример 2.3. Да ја разгледаме следната потполно комутативна (6,2) - група на *C\ {0,1}* дефинирана со :

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = (w_1, w_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 = w_1 w_2 \\ (1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)(1-z_4)(1-z_5)(1-z_6) = -4(1-w_1)(1-w_2) \end{cases}$$

Забележуваме дека за *(i,i,i,i)* и *(-i,-i,-i,-i)* важи *(ii)* од дефиницијата за потполно комутативна (6,2)-група со единица.

3. КОНСТРУКЦИЈА НА СЛОБОДНИ ПОТПОЛНО КОМУТАТИВНИ *(m + k, m)* - ГРУПИ СО ЕДИНИЦА КОГА *m ≥ k*

Нека A е дадено множество. Нека на секој елемент a од A му е придружено множество елементи $D_a = \{a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(m)}\}$ т.ш. $a^{(i)} \neq a^{(j)}$ за $i \neq j$, $D_a \cap A = \varnothing$ i $D_a \cap D_b = \varnothing$ za $a, b \in A$ и $a \neq b$. Нека e е елемент таков што $e \notin A \cup (\underset{a \in A}{\cup} D_a)$. Ставаме

$$B_0 = A \cup \{e\} \cup (\underset{a \in A}{\cup} D_a).$$

Нека $E_o = \underset{s \geq 1}{\cup} B_o^{(m+sk)}$ и нека $R_o \subseteq E_o$ така што $x \in R_o$ ако и само ако:

(e$_1$) $x \neq e^k u_1^{m+sk}$, каде $s \geq 0$;

(e$_2$) $x \neq a^{(0)} a^{(1)} a^{(2)} ... a^{(m)} u_1^{sk-1}$, каде $s \geq 1$, каде $a^{(0)} = a \in A$, $a^{(i)} \in D_a$ за секој $i = \overline{1, m}$.

На елементите од $B_0^{(+)}$ дефинираме норма со:

$$\|e\| = 0$$

$$\|x\| = 1 \qquad \forall x \in A \cup (\underset{a \in A}{\cup} D_a)$$

$$\|uv\| = \|u\| + \|v\| \quad \text{за } u, v \in B_0.$$

Нека $B_\alpha, E_\alpha, R_\alpha$ се конструирани. Ставаме $B_{\alpha+1} = B_\alpha \cup (\mathbb{N}_m \times R_\alpha)$ и $E_{\alpha+1} = \underset{s \geq 1}{\cup} B_{\alpha+1}^{(m+sk)}$. Нека $R_{\alpha+1} \subseteq E_{\alpha+1}$ така што $x \in R_{\alpha+1}$ акко:

(e$_1$) $x \neq e^k u_1^{m+sk}$, каде $s \geq 0$;

(e$_2$) $x \neq a^{(0)} a^{(1)} a^{(2)} ... a^{(m)} u_1^{sk-1}$, каде $s \geq 1$, $a^{(0)} = a \in A$, $a^{(i)} \in D_a$ за секој $i = \overline{1, m}$;

(e$_3$) $x \neq (1, y)(2, y)...(m, y) u_1^{sk}$, каде $s \geq 1$ и $y \in R_\alpha$.

Нека нормата е дефинирана за секој елемент $x \in B_\alpha^{(+)}$. Тогаш на $B_{\alpha+1}^{(+)}$ дефинираме норма на следниот начин:

Ако $x \in B_{\alpha+1} = B_\alpha \cup (\mathbb{N}_m \times R_\alpha)$, тогаш

$\|x\|$ е дефинирано за секој елемент $x \in B_\alpha$;

$\|x\| = \|(i, y)\| = 1 + \|y\|$ за $x = (i, y) \in \mathbb{N}_m \times R_\alpha$, при што $y \in R_\alpha \subseteq E_\alpha \subseteq B_\alpha^{(+)}$, па $\|y\|$ е дефинирано;

$\|uv\| = \|u\| + \|v\|$ за $u, v \in B_{\alpha+1}$.

Ставаме $B = \underset{\alpha \geq 0}{U} B_\alpha$.

Нека $E = \underset{s \geq 0}{\cup} B^{(m+sk)}$ и

$$R = \underset{\alpha \geq 0}{U} \left(R_\alpha \cup \left(B^{(m)} \setminus \{(1, y)(2, y)...(m, y) \mid y \in R_\alpha\}\right)\right).$$

Од конструкцијата на множествата е јасно дека $R \subseteq E \subseteq B^{(+)}$.

Елементите од R ќе ги нарекуваме **редуцирани**, а останатите елементи од E ќе ги нарекуваме **редуцибилни**.

Дефинираме редукција $\varphi : E \to R$ со индукција по норма или должина на следниов начин:

(0) $\varphi(x) = x, \quad \forall x \in R$;

Нека $\varphi(y)$ е дефинирано за секое y т.ш. $\|y\| < \|x\|$ или $\|y\| = \|x\|$ и $|y| < |x|$. Ако $x \notin R$, тогаш $\varphi(x)$ е дефинирано со првата можна примена на еден од следните чекори:

(1) $\varphi\left(e^k u_1^{m+sk}\right) = \varphi\left(u_1^{m+sk}\right)$, каде $s \geq 0$, при што $\left\|u_1^{m+sk}\right\| = \left\|e^k u_1^{m+sk}\right\|$ и $\left|u_1^{m+sk}\right| < \left|e^k u_1^{m+sk}\right|$, па $\varphi\left(u_1^{m+sk}\right)$ постои и е индуктивно дефинирано;

(2) $\varphi\left(aa^{(1)}a^{(2)}...a^{(m)}u_1^{sk-1}\right) = \varphi\left(e^{m-k+1}u_1^{sk-1}\right)$, каде $s \geq 1$, при што $\left\|e^{m-k+1}u_1^{sk-1}\right\| < \left\|aa^{(1)}a^{(2)}...a^{(m)}u_1^{sk-1}\right\|$, па $\varphi\left(e^{m-k+1}u_1^{sk-1}\right)$ постои и е индуктивно дефинирано;

(3) $\varphi\left((1,y)(2,y)...(m,y)u_1^{sk}\right) = \varphi\left(yu_1^{sk}\right)$, каде $s \geq 0$ и важи $\left\|yu_1^{sk}\right\| < \left\|(1,y)(2,y)...(m,y)u_1^{sk}\right\|$ и уште $\left|yu_1^{sk}\right| = m + s_1k + sk$, па $\varphi\left(yu_1^{sk}\right)$ постои и е индуктивно дефинирано.

Од дефиницијата на φ следува дека ако x ги има сите облици кои можат да се редуцираат, тогаш за φ се применува редоследот (1), (2), (3). Но, се покажува дека φ не зависи од редоследот на примената на (1), (2), (3).

Тврдење 3.1 $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$ и уште

ако $\|\varphi(x)\| = \|x\|$, тогаш или $\varphi(x) = x$ или $|\varphi(x)| < |x|$.

Доказ: Со индукција по норма или должина. ■

Тврдење 3.2 (i) $\varphi(\varphi(u)) = \varphi(u)$;

(ii) $\varphi(\varphi(u)v) = \varphi(uv)$.

Доказ: Со индукција по норма или должина. ■

Користејќи ја редукцијата φ, дефинираме потполно комутативна *(n, m)*- операција $f : B^{(n)} \to B^{(m)}$, $B = \bigcup_{i \geq 0} B_i$ на следниов начин:

$$f\left(x_1^n\right) = \begin{cases} \varphi\left(x_1^n\right), & \text{ако } \varphi\left(x_1^n\right) \in B^{(m)} \\ \left(1, \varphi\left(x_1^n\right)\right) ... \left(m, \varphi\left(x_1^n\right)\right), & \text{ако } \varphi\left(x_1^n\right) \notin B^{(m)} \end{cases}$$

Тврдење 3.3. (B, f) е потполно комутативна *(n,m)*-група со единица *e*.

Доказ: f е добро дефинирана операција и јасно f е потполно комутативна *(n,m)*- операција.

(i) Асоцијативност:

Се покажува дека дефиницијата на $f\left(f\left(x_1^n\right)x_{n+1}^{n+k}\right)$ не зависи од $\varphi\left(x_1^n\right)$, туку само од $\varphi\left(x_1^{n+k}\right)$, и повторно, дефиницијата на $f\left(x_1^i f\left(x_{i+1}^{i+n}\right)x_{i+n+1}^{n+k}\right)$ не зависи од $\varphi\left(x_{i+1}^{i+n}\right)$, туку само од $\varphi\left(x_1^{\mathrm{n+k}}\right)$, што значи
$f\left(f\left(x_1^n\right)x_{n+1}^{n+k}\right)=f\left(x_1^i f\left(x_{i+1}^{i+n}\right)x_{i+n+1}^{n+k}\right)\ \forall i \in \{1,2,...k\}$.

(ii) Нека $x_1^m \in B^{(m)}$. Тогаш за $e \in B$ важи:

- Ако $x_1^m \neq (1,y)...(m,y)$, тогаш:
  $\varphi\left(x_1^m e^k\right)=\varphi\left(x_1^m\right)=x_1^m$, па значи $f\left(x^m e^k\right)=\varphi\left(x^m e^k\right)=x_1^m$.
- Ако $x_1^m = (1,y)...(m,y)$, каде, јасно $y \notin B^{(m)}$, но $y \in R$, па имаме:

$$\varphi\left(x_1^m e^k\right)=\varphi\left((1,y)...(m,y)e^k\right)=\varphi\left((1,y)...(m,y)\right)=\varphi\left(y\right)=y,$$

па значи

$$f\left(x_1^m e^k\right)=\left(1,\varphi(x_1^m e^k)\right)...\left(m,\varphi(x_1^m e^k)\right)=(1,y)...(m,y)=x_1^m.$$

Значи $\left(\forall\ x_1^m \in B^{(m)}\right)$ важи $f\left(x_1^m e^k\right)=x_1^m$, од каде следи e е единица во *B*.

(iii) Се докажува индуктивно по α дека $\forall\ \underline{b}=b_1^k \in B^{(k)}=(\bigcup_{\alpha\geq 0} B_\alpha)^{(k)}$, $\exists\ \underline{x}=x_1^m \in B^{(m)}$ (единствен до пермутација) т.ш. $f\left(b_1^k x_1^m\right)=e^m$.

Нека $b_1^k \in B_o^{(k)}$ т.е $\underline{b}=b_1^k=a_1^{(i_1)}...a_j^{(i_j)}e^{k-j}$ каде $j \in \{0,1,...k\}$, $a_1,...,a_j \in A$, и $i_1,i_2,...,i_j \in \{0,1,...m\}$, при што за $a \in A$ ќе означуваме $a^{(0)}$. Нагласуваме дека во изразот $a_p^{(i_p)}a_q^{(i_q)}$ се можни случаите: $p=q$ и $i_p \neq i_q$; $p \neq q$ и $i_p = i_q$; $p=q$ и $i_p = i_q$; $p \neq q$ и $i_p \neq i_q$ т.е. $i_1,i_2,...,i_j$ се само ознаки за еден од "степените" $\{0,1,...m\}$ на a_1 ,..., a_j .

Нека
$y = a_1^{(0)}...a_1^{(i_1-1)}a_1^{(i_1+1)}...a_1^{(m)}a_2^{(0)}...a_2^{(i_2-1)}a_2^{(i_2+1)}...a_2^{(m)}...a_j^{(0)}...a_j^{(i_j-1)}a_j^{(i_j+1)}...a_j^{(m)}e^{m+m(k-j)}$
. За y важи $|y|=mj+m+m(k-j)=m+mk$, па значи y е со добра должина т.е. постои $\varphi(y)$. Избираме

$$\underline{x}=x_1^m=\begin{cases}\left(1,\varphi(y)\right)...\left(m,\varphi(y)\right), & \text{ако } |\varphi(y)|=m+sk,\quad s\geq 1\\ \varphi(y), & \text{ако } |\varphi(y)|=m\end{cases}$$

Се покажува дека и во двата случаи важи $\varphi(\underline{b}\underline{x})=e^m$.

Нека тврдењето важи за секој $i \leq \alpha$ и нека $\underline{b}=b_1^k \in {B_{\alpha+1}}^{(k)}=\left(B_\alpha \cup (\mathbb{N}_m \times R_\alpha)\right)^{(k)}$ т.е.

$$\underline{b}=\left(i_{(1)1},{u_{(1)1}}^{m+s_1k}\right)..\left(i_{(1)p_1},{u_{(1)1}}^{m+s_1k}\right)\left(i_{(2)1},{u_{(2)1}}^{m+s_2k}\right)..\left(i_{(2)p_2},{u_{(2)1}}^{m+s_2k}\right)...$$

$$\left(i_{(q)1},{u_{(q)1}}^{m+s_qk}\right)..\left(i_{(q)p_q},{u_{(q)1}}^{m+s_qk}\right)v_1^{k-p}$$

при што, $i_{(1)1},...,i_{(1)p_1},i_{(1)p_1+1},...,i_{(1)m}$, $i_{(2)1},...,i_{(2)p_2},i_{(2)p_2+1},...,i_{(2)m}$, ..., $i_{(q)1},...,i_{(q)p_q},i_{(q)p_q+1},...,i_{(q)m}$ се пермутации на $\{1,2,...,m\}$ и $i_{(h)j} \neq i_{(h)z}$ за $j{\neq}z$ и за секој $h=\overline{1,q}$, а $p_1+p_2+...p_q=p$, каде $1 \leq p \leq k$, $0 \leq p_h \leq p$ за $h=\overline{1,q}$ и уште $v_i \in B_\alpha$ за $i=\overline{1,k-p}$.

Прво, да забележиме дека од $m \geq k$, следува $\exists\, l \geq 1$ т.ш. $m=lk+r$ каде $r \in \{0,1,...,k-1\}$. Тогаш можеме да запишеме $m+s_hk=lk+r+s_hk=(l+s_h)k+r$ за $h=\overline{1,q}$. Од индуктивната претпоставка следува секој елемент од $B_i^{(k)}$ за $0 \leq i \leq \alpha$, има инверзен елемент, па од конструкцијата на $B_{\alpha+1}=B_\alpha \cup (\mathbb{N}_m \times R_\alpha)$ и на $R_\alpha \subseteq E_\alpha = \bigcup_{s\geq 1} B_\alpha^{(m+sk)}$ е јасно дека $u_{(h)i} \in B_\alpha$ за $1 \leq i \leq m+s_hk$ каде $1 \leq h \leq q$ и $v_i \in B_\alpha$ за $1 \leq i \leq k-p$. Тогаш за $u_{(h)}{}_{zk+1}^{zk+k} \in B_\alpha^{(k)}$, $z=\overline{0,\ l+s_h-1}$ каде $h=\overline{1,q}$; за $u_{(l+s_h)k+1}^{(l+s_h)k+r}e^{k-r} \in B_\alpha^{(k)}$ каде $h=\overline{1,q}$ и за $v_1^{k-p}e^p \in B_\alpha^{(k)}$ постојат инверзни елементи, кои ќе ги означиме $\left(u_{(h)}{}_{zk+1}^{zk+k}\right)^{-1}$ за $z=\overline{0,\ l+s_h-1}$, $\left(u_{(l+s_h)k+1}^{(l+s_h)k+r}e^{k-r}\right)^{-1}$ каде $h=\overline{1,q}$ и $\left(v_1^{k-p}e^p\right)^{-1}$ соодветно, такви што:

$$\varphi\left(\left(u_{(h)}{}_{zk+1}^{zk+k}\right)\left(u_{(h)}{}_{zk+1}^{zk+k}\right)^{-1}\right)=e^m \quad ; \quad \text{за } z=\overline{0,\ l+s_h-1} \quad \text{каде } h=\overline{1,q},$$

$$\varphi\left(\left(u_{(l+s_h)k+1}^{(l+s_h)k+r}e^{k-r}\right)\left(u_{(l+s_h)k+1}^{(l+s_h)k+r}e^{k-r}\right)^{-1}\right)=e^m \qquad \text{за} \qquad h=\overline{1,q} \qquad \text{и}$$

$$\varphi\left(\left(v_1^{k-p}e^p\right)\left(v_1^{k-p}e^p\right)^{-1}\right)=e^m.$$

Нека

$$y=\left(i_{(1)p_1+1},u_{(1)}{}_1^{m+s_1k}\right)...\left(i_{(1)m},u_{(1)}{}_1^{m+s_1k}\right)...\left(i_{(q)p_q+1},u_{(q)}{}_1^{m+s_qk}\right)...\left(i_{(q)m},u_{(q)}{}_1^{m+s_qk}\right)\left(u_{(1)}{}_1^{k}\right)^{-1}\ ...$$
$$...\left(u_{(1)}{}_{(l+s_1-1)k+1}^{(l+s_1)k}\right)^{-1}\left(u_{(1)}{}_{(l+s_1)k+1}^{(l+s_1)k+r}e^{k-r}\right)^{-1}...\left(u_{(q)}{}_1^{k}\right)^{-1}...\left(u_{(q)}{}_{(l+s_q-1)k+1}^{(l+s_q)k}\right)^{-1}\left(u_{(q)}{}_{(l+s_q)k+1}^{(l+s_q)k+r}e^{k-r}\right)^{-1}\left(v_1^{k-p}e^p\right)^{-1}e^t$$

при што изборот на t го правиме од условот $|y| \equiv m \pmod{k}$.

Бидејќи важи

$$|y|=\left((l+2)q+(s_1+s_2...+s_q)\right)m+m-p+t$$

избираме $t=Ak+p-\left((l+2)q+(s_1+s_2...+s_q)\right)m$ каде A е најмалиот природен број таков што $t \geq 0$ и $t \geq (k-r)q+p$.

Сега избираме

$$\underline{x}=x_1^m=\begin{cases}\left(1,\varphi(y)\right)...\left(m,\varphi(y)\right), & \text{ако } |\varphi(y)|=m+sk, \quad s \geq 1\\ \varphi(y), & \text{ако } |\varphi(y)|=m\end{cases}$$

Се покажува дека и во двата случаи важи $\varphi(\underline{bx})=e^m$.

Значи $\forall\ b_1^k \in B^{(k)}$, $\exists\ \underline{x}=x_1^m \in B^{(m)}$ (единствен до пермутација) т.ш. $f\left(b_1^kx_1^m\right)=e^m$.

Од *(i), (ii)* и *(iii)* следува (B,f) е потполно комутативна *(n,m)* група со единица *e*. ■

Тврдење 3.4. Конструираната потполно комутативна *(n, m)* - група со единица *(B,f)* е слободна.

Доказ: Нека $(H,[\ ])$ е произволна потполно комутативна *(n, m)* група со единица $e^{'}$.

H е непразно множество, па според аксиомата на Цермело, постои подредување на *H*, такво што во однос на тоа подредување *H* е добро подредено, од каде пак следи *H* е потполно подредено.

Нека $\xi : A \to H$ е произволно пресликување. Индуктивно по α дефинираме пресликување $\eta : B = \underset{\alpha \geq 0}{\cup} B_\alpha \to H$ со:

За $x \in B_0$:

$\eta(a) = \xi(a)$ за $a \in A$.

$\eta(e) = e'$ каде е´ е единицата во $(H,[\ ])$.

$(H,[\ ])$ е потполно комутативна *(n, m)* група со единица $e^{'}$, па значи за секој елемент од $H^{(k)}$, па и за $a'e'^{k-1}$, постои единствен елемент (до пермутација) $x_1^m \in H^{(m)}$ т.ш. $\left[a'e'^{k-1}\, x_1^m\right] = e'^m$.

Нека за секој $\eta(a) \in H$, каде $a \in A$, тој елемент $x_1^m \in H^{(m)}$ го означиме со $\eta(a)^{(1)}\eta(a)^{(2)}...\eta(a)^{(m)}$, така што важи $\eta(a)^{(1)} \leq \eta(a)^{(2)} \leq ... \leq \eta(a)^{(m)}$ во однос на подредувањето на *H*. Значи важи $\left[\eta(a)e'^{k-1}\, \eta(a)^{(1)}\eta(a)^{(2)}...\eta(a)^{(m)}\right] = e'^m$. Сега ставаме:

$\eta(a^{(i)}) = \eta(a)^{(i)}$ за секој $i \in N_m$, каде $\eta(a)^{(i)}$ ги задоволува горните својства.

Нека η е дефинирано за секој *i*, $1 \leq i \leq \alpha$ и нека $x = \left(i, u_1^{m+sk}\right) \in B_{\alpha+1}$. Тогаш $u_j \in B_\alpha$ за $1 \leq j \leq m+sk$, па $\eta(u_j)$ е индуктивно дефинирано. Дефинираме:

$\eta(i, u_1^{m+sk}) = [\eta(u_1)...\eta(u_{m+sk})]_i$ така што $[\eta(u_1)...\eta(u_{m+sk})]_1 \leq [\eta(u_1)...\eta(u_{m+sk})]_2 \leq ... \leq [\eta(u_1)...\eta(u_{m+sk})]_m$ во однос на подредувањето на *H*.

Се покажува, индуктивно по норма, дека важи: ако $f\left(x_1^{m+k}\right) = b_1^m$, тогаш $[\eta(x_1)...\eta(x_{m+k})] = \eta(b_1)...\eta(b_m)$, т.е. дека вака дефинираното прескикување η е хомоморфизам од потполно комутативната *(m+k, m)* група со единица (B,f) во потполно комутативна *(m+k, m)* група со единица $(H,[\ ])$ и η е проширување на ξ. Значи (B,f) е слободна *(m+k,m)* група со единица со база А.■

Би напоменале дека пресликувањето $\eta : B = \underset{\alpha \geq 0}{\cup} B_\alpha \to H$ дефинирано погоре, не е единствено со бараните својства. Имено, η може да се дефинира на било кој од следните начини:

$\eta(a^{(i)}) = \eta(a)^{(\sigma_1(i))}$ за $i \in I\!N_m$ каде σ_1 е било која пермутација на $\{1,2,...,m\}$, а важи $\eta(a)^{(1)} \leq \eta(a)^{(2)} \leq ... \leq \eta(a)^{(m)}$ во однос на подредувањето на *H*, и важи $\left[\eta(a)e'^{k-1}\eta(a)^{(1)}\eta(a)^{(2)}...\eta(a)^{(m)}\right] = e'^{m}$;

и уште:

$\eta(i, u_1^{m+sk}) = [\eta(u_1)...\eta(u_{m+sk})]_{\sigma_2(i)}$ за $i \in I\!N_m$, каде σ_2 е било која пермутација на $\{1,2,...,m\}$ и $[\eta(u_1)...\eta(u_{m+sk})]_1 \leq [\eta(u_1)...\eta(u_{m+sk})]_2 \leq ... \leq [\eta(u_1)...\eta(u_{m+sk})]_m$ во однос на подредувањето на *H*.

4. КОНСТРУКЦИЈА НА СЛОБОДНИ ПОТПОЛНО КОМУТАТИВНИ *(m + k, m)* - ГРУПИ СО ЕДИНИЦА КОГА *k>m*

Во овој дел е дадена конструкција на потполно комутативна векторско вредносна група со една единица генерирана од множество А кога *k>m.* Како што е кажано во 2., единицата во овој случај може да не е единствена.

Конструкцијата и во овој случај е иста како во претходниот случај. Нека A е дадено множество. На ист начин како претходно се дефинираат множествата D_a, елементот $e \notin A \cup (\underset{a\in A}{\cup} D_a)$, B_0, E_0, R_0. Повторно на елементите од $B_0^{(+)}$ дефинираме норма со:

$$\|e\| = 0 \qquad \|x\| = 1 \qquad \forall x \in A \cup (\underset{a\in A}{\cup} D_a)$$

$$\|uv\| = \|u\| + \|v\| \quad \text{за } u, v \in B_0.$$

Нека $B_\alpha, E_\alpha, R_\alpha$ се конструирани. Множествата $B_{\alpha+1}, E_{\alpha+1}, R_{\alpha+1}$ се конструирани како во претходниот случај и е дефинирана норма на елементите од $B_{\alpha+1}^{(+)}$.

Ставаме $B = \underset{\alpha\geq 0}{U} B_\alpha$. Нека $E = \underset{s\geq 0}{\cup} B^{(m+sk)}$ и

$$R = \underset{\alpha\geq 0}{U}\left(R_\alpha \cup \left(B^{(m)} \setminus \{(1,y)(2,y)...(m,y) | y \in R_\alpha\}\right)\right).$$

Од конструкцијата на множествата е јасно дека $R \subseteq E \subseteq B^{(+)}$.

Елементите од R ќе ги нарекуваме **редуцирани**, а останатите елементи од E ќе ги нарекуваме **редуцибилни**.

Дефинираме редукција $\varphi : E \to R$ со индукција по норма или должина на следниов начин:

(0) $\varphi(x) = x, \quad \forall x \in R$;

Нека $\varphi(y)$ е дефинирано за секое y т.ш. $\|y\| < \|x\|$ или $\|y\| = \|x\|$ и $|y| < |x|$. Ако $x \notin R$, тогаш $\varphi(x)$ е дефинирано со првата можна примена на еден од следните чекори:

(1) $\varphi(e^k u_1^{m+sk}) = \varphi(u_1^{m+sk})$, каде $s \geq 0$, при што $\|u_1^{m+sk}\| = \|e^k u_1^{m+sk}\|$ и $|u_1^{m+sk}| < |e^k u_1^{m+sk}|$, па $\varphi(u_1^{m+sk})$ постои и е индуктивно дефинирано;

(2) $\varphi\left(aa^{(1)}a^{(2)}...a^{(m)}u_1^{sk-1}\right)=\varphi\left(e^{m+1}u_1^{sk-1}\right)$, каде $s\geq 1$, при што $\left\|e^{m+1}u_1^{sk-1}\right\|<\left\|aa^{(1)}a^{(2)}...a^{(m)}u_1^{sk-1}\right\|$, па $\varphi\left(e^{m+1}u_1^{sk-1}\right)$ постои и е индуктивно дефинирано;

(3) $\varphi\left((1,y)(2,y)...(m,y)u_1^{sk}\right)=\varphi\left(yu_1^{sk}\right)$, каде $s\geq 0$ и важи $\left\|yu_1^{sk}\right\|<\left\|(1,y)(2,y)...(m,y)u_1^{sk}\right\|$ и уште $\left|yu_1^{sk}\right|=m+s_1k+sk$, па $\varphi\left(yu_1^{sk}\right)$ постои и е индуктивно дефинирано.

Како што се гледа, дефиницијата на φ се разликува во (2) од соодветната дефиниција на φ во случајот $m\geq k$.

Од дефиницијата на φ следува дека ако x ги има сите облици кои можат да се редуцираат, тогаш за φ се применува редоследот (1), (2), (3). Но, се покажува дека φ не зависи од редоследот на примената на (1), (2), (3).

За φ важат истите тврдења како во 3.

Тврдење 4.1. $\|\varphi(x)\|\leq\|x\|$ и уште ако $\|\varphi(x)\|=\|x\|$, тогаш или $\varphi(x)=x$ или $|\varphi(x)|<|x|$.■

Тврдење 4.2. (i) $\varphi(\varphi(u))=\varphi(u)$; (ii) $\varphi(\varphi(u)v)=\varphi(uv)$.■

Користејќи ја редукцијата φ, на $B=\bigcup_{i\geq 0}B_i$ дефинираме *(n, m)* операција f на следниов начин:

$$f\left(x_1^n\right)=\begin{cases}\varphi\left(x_1^n\right), & \text{ако } \varphi\left(x_1^n\right)\in B^{(m)}\\ \left(1,\varphi\left(x_1^n\right)\right)...\left(m,\varphi\left(x_1^n\right)\right), & \text{ако } \varphi\left(x_1^n\right)\notin B^{(m)}\end{cases}$$

Тврдење 4.3. (B,f) е потполно комутативна *(n,m)* група со единица *e*

Тврдење 4.4. Конструираната потполно комутативна *(n, m)* - група со единица *(B,f)* е слободна.■

Доказот на последните две тврдења е сличен со соодветните тврдења дадени во 3. т.е. во случајот $m\geq k$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Trenčevski, B. Janeva: *Units in Vector-Valued Groups,* Математички Билтен 28 (LIV) 2004 (113-124)

[2] Ġ. Čupona, N. Celakoski, S. Markovski, D. Dimovski: *Vector Valued Groupoids, Semigroups and Groups; "Vector Valued Semigroups and Groups",* Macedonian Academy of Sciences and Arts , 1988 (1-79)

[3] Ġ. Čupona, D. Dimovski, A. Samardžiski: *Fully Commutative Vector Valued Groups;* Contributions, VIII 2-Section of Mathematical and Technical Sciences, MANU, 1987 (5-17)

[4] B. Janeva: *Free Fully Commutative Vector Valued Groups,* Proc. of Conf. "Algebra and Logic", Maribor, 1989

[1]ДСУ "Орде Чопела", Прилеп, Македонија
e-mail: marijanaspirkoska@yahoo.com
[2]Институт за информатика
Природно-математички факултет, Скопје, Македонија
e-mail: biljana@pmf.ukim.edu.mk