ЗА ЕДНА КЛАСА ПОЛУГРУПИ

Дорка Коробар-Таневска
Оддел за математика и информатика,
Машински факултет, Скопје, Р. Македонија

Апстракт: Во трудот се дефинираат лево (десно) нултите полугрупи од тип (k,s) и се разгледуваат некои нивни својства. Посебно се проучуваат лево нултите полугрупи од тип (3,2), за коишто е даден еден структурен опис, како и услови за постоење хомоморфизам меѓу две полу-групи од овој тип.

Нека S е полугрупа со својството

(1) $$(\forall x_i \in S) \quad x_1x_2 \dots x_k = x_1x_2 \dots x_s, \quad i = 1,\dots,k, \quad s<k.$$

Лема 1. Полугрупата S со својството (1) е лево нулта полугрупа ако и само ако S е идемпотентна.

Доказ. Ако S е лево нулта полугрупа, тогаш, очигледно, таа е идемпотентна. Обратно, нека S е идемпотентна полугрупа со својството (1). За секои $x,y \in S$ имаме

$$xy = x^s y^{k-s} = x^s = x,$$

па следува дека S е лево нулта полугрупа. ◊

Значи, полугрупата S со својството (1) не е и обична лево нулта полугрупа. Неа ќе ја наречеме *лево нулта полугрупа* (скратено - ЛНП) *од тип (k,s)*. Симетрично може да се дефинираат *десно нултите полугрупи (ДНП) од тип (k,s)*, како полугрупи со својството

$$(\forall x_i \in S) \quad x_1x_2 \dots x_k = x_{k-s+1}x_{k-s+2} \dots x_k, \quad i = 1,\dots,k, \quad s<k.$$

Понатаму ќе претпоставиме дека S е лево нулта полугрупа од тип (k,s), бидејќи добиените својства би можеле да бидат трансформирани по аналогија за десно нултите полугрупи од тип (k,s).

Нека $x \in S$. Според (1) имаме дека

$$x^k = x^s,$$

па за цикличната потполугрупа од S, генерирана од x, се добива

$$\langle x \rangle = \{x, x^2, \dots, x^s, x^{s+1}, \dots, x^{k-1}\},$$

при што $K_x = \{x^s, x^{s+1}, \dots, x^{k-1}\}$ е периодичниот дел од $\langle x \rangle$ што е подгрупа и во $\langle x \rangle$ и во S. Така се добива

Лема 2. За секој $x \in S$, потполугрупата $\langle x \rangle$ генерирана од x е циклична потполугрупа со индекс не поголем од s и период не поголем од k-s. ◊

Значи, иако S не е идемпотентна полугрупа, бидејќи единицата на подгрупата K_x е идемпотент, следува дека S содржи идемпотенти. Нека го означиме со E множеството од сите идемпотенти на S.

Лема 3. Множеството E е лево нулта потполугрупа од S што е идеал во S и притоа за секои $e \in E$ и $x \in S$ важи $ex = e$.

Доказ. Ако $e \in E$, тогаш за секој $x \in S$ имаме

$$ex = e^{k-1} x = e^s = e .$$

Оттука $ES \subseteq E$, а потоа, имајќи го предвид горното, се добива дека

$$(xe)^2 = xexe = xee = xe ,$$

такашто xe е идемпотент, значи $xe \in E$, па $SE \subseteq E$. Така, множеството E е идеал во S, кој поради докажаната особина $ex = e$ претставува лево нулта потполугрупа од S. ◊

Очигледно е дека секоја лево нулта полугрупа од тип (s+1,s) е и лево нулта полугрупа од тип (k,s), за секој $k > s+1$, затоа што важи

$$x_1 \dots x_s x_{s+1} \dots x_k = x_1 \dots x_s x_{s+2} \dots x_k = \dots = x_1 \dots x_s x_k = x_1 \dots x_s .$$

Точно е и обратното. Нека S е ЛНП од тип (k,s), каде $k>s+1$. Тогаш

$$x_1 \dots x_s x_{s+1} \dots x_k = x_1 \dots x_s \quad \text{и}$$
$$x_1 \dots [x_s (x_{s+1} x_{s+2})] \dots x_k = x_1 \dots [(x_s x_{s+1}) x_{s+2}] \dots x_k = x_1 \dots x_s x_{s+1}$$

Од еднаквоста на левите страни ќе следува дека S е ЛНП од тип (s+1,s), односно дека важи

Теорема 1. Секоја лево нулта полугрупа од тип (s+1,s) е лево нулта полугрупа од тип (k,s), за секој природен број $k > s+1$. Обратно, ако S е лево нулта полугрупа од тип (k,s), за некој $k > s+1$, тогаш S ќе биде и лево нулта полугрупа од тип (s+1,s) . ◊

Бидејќи обичните лево нулти полугрупи одговараат на типот (2,1), во продолжение ги проучуваме лево нултите полугрупи од тип (3,2) .

Лево (десно) нулти полугрупи од тип (3,2)

Во овој дел претпоставуваме дека S е лево нулта полугрупа од тип (3,2), т.е. во S е задоволено својството

(1') $$(\forall x,y,z \in S) \quad xyz = xy .$$

Во овој случај, за секој $x \in S$ имаме $x^3 = x^2$, па цикличната потполугрупа генерирана од x и соодветната подгрупа K_x ќе бидат

$$\langle x \rangle = \{ x, x^2 \} , \quad K_x = \{ x^2 \} .$$

Значи за секој $x \in S$, x^2 е идемпотент, т.е. $x^2 \in E$. Уште повеќе, се покажува дека и производот на кои било два елемента од S е идемпотент.

Лема 4. За секои $x,y \in S$, производот $xy \in E$.
Доказ. Навистина, според (1') имаме

$$(xy)^2 = (xyx)y = xyy = xy$$

што значи дека xy е идемпотент, односно дека $xy \in E$. ◊

Од последната лема следува дека Rees-овата фактор-полугрупа S/E е нулта полугрупа.

Подолу е даден пример за постоење ЛНП од тип (3,2).

Пример. Нека E и A се две непразни дисјунктни множества и нека $P = E \cup A$, а φ е пресликување од A во E. Во P се дефинира операција со:

(i) $ey = e$, ако $e \in E$, $y \in P$

(ii) $xy = \varphi(x)$, ако $x \in A$, $y \in P$.

Во однос на вака дефинираната операција P е полугрупа:

а) $e \in E$, $x, y \in P \Rightarrow (ex)y = ey = e = e(xy)$,

б) $x \in A$, $y, z \in P \Rightarrow (xy)z = \varphi(x)z = \varphi(x) = x(yz)$.

P го поседува и својството (1'), бидејки при горните ознаки имаме:

а) $exy = e = ex$

б) $xyz = \varphi(x) = xy$.

Значи $P = E \cup A$ е лево нулта полугрупа од тип (3,2). Но треба да се забележи дека полугрупата P не е и лево нулта. Поради $A \neq \varnothing$, постои $x \in A$, при што $\varphi(x) \in E$, а бидејки E и A се дисјунктни множества следува дека $xy = \varphi(x) \neq x$.

Се враќаме сега на лево нултата полугрупа S од типот (3,2). Означуваме $A = S \setminus E$ и дефинираме пресликување ψ така што

$$\psi(x) = x^2, \quad x \in S. \tag{2}$$

Бидејки x^2 е идемпотент, следува дека ψ е пресликување од S во E, такво што $\psi_{|E} = \varepsilon_E$. Тогаш за производот xy на кои било $x, y \in S$, со оглед на (1') важи

$$xy = xyy = x\psi(y). \tag{3}$$

За $x \in E$ равенството (3) важи тривијално, затоа што $xy = x = x\psi(y)$. Ако пак $x \in A$, бидејки за кој било $y \in S$, $\psi(y) \in E$, тогаш доволно би било да се разгледа производот xy за $y \in E$ (со оглед на (3)).

Нека, $x \in A$ и $e \in E$. Бидејки, според лема 3, $xe \in E$, ако се стави

$$\varphi^e(x) = xe, \tag{4}$$

ќе се добие пресликување φ^e од A во E. На тој начин е определена една фамилија од пресликувања

$$\Phi = \{ \varphi^e : A \to E \mid e \in E \}.$$

Имајки ја предвид лемата 4, т.е. дека за кои било $x, y \in S$, $xy \in E$, како и равенството (3), се добива:

$$(xy)z = xy = x\,\psi(y) = \varphi^{\psi(y)}(x),$$
$$x(yz) = \varphi^{yz}(x).$$

Поради $(xy)z = x(yz)$, тоа значи дека за кои било $y, z \in S$, $\varphi^{yz}(x) = \varphi^{\psi(y)}(x)$. Оттука, со оглед на (3) и (4), се добива дека

$$\varphi^{\varphi^{\psi(z)}(y)} = \varphi^{\psi(y)}, \text{ за кои било } y, z \in S. \tag{5}$$

Според погоре изнесеното, во лево нултата полугрупа S од типот (3,2) производот xy, на кои било $x,y \in S$, можеме да го изразиме со помош на пресликувањата φ и ψ, на следниов начин :

$$(6) \qquad xy = \begin{cases} x, & x \in E \\ \varphi^{y}(x), & x \in A,\, y \in E \\ x\psi(y) = \varphi^{\psi(y)}(x), & x, y \in A. \end{cases}$$

Обратно, нека сега E и A се две непразни, дисјунктни множества, $S=E\cup A$ и нека $\psi\colon S\to E$ е пресликување такво што $\psi|_E = \varepsilon_E$. Натаму, нека $\Phi=\{\varphi^e\colon A\to E \mid e\in E\}$ е фамилија пресликувања за коишто важи својството (5). Тогаш во S може да се дефинира операција со (6) .

Се покажува дека во однос на вака дефинираната операција S е полугрупа. Нека $x,y,z \in S$:

(i) ако $x\in E$, тогаш $(xy)z = xz = x = x(yz)$;

(ii) ако $x\in A$, $y\in E$, тогаш $(xy)\, z = \varphi^y(x)\, z = \varphi^y(x)$ и $x(yz) = xy = \varphi^y(x)$ па следува дека $(xy)z = x(yz)$;

(iii) ако $x,y\in A$, со оглед на (5) , се добива

$$(xy)\, z = \varphi^{\psi(y)}(x)\, z = \varphi^{\psi(y)}(x)$$

$$x\,(yz) = x(y\psi(z)) = x\, \varphi^{\psi(z)}(y) = \varphi^{\varphi^{\psi(z)}(y)}(x) = \varphi^{\psi(y)}(x)\,,$$

па и во овој случај важи асоцијативниот закон, при што на почетокот во втората низа од горните равенства е искористено својството дека за $z\in E$, $\psi(z) = z$.

Од дефиницијата на операцијата во S со (6) произлегува дека за кои било $x,y \in S$, производот $xy \in E$, па затоа следува дека

$$xyz = (xy)z = xy\,.$$

Со тоа е покажано дека добиената полугрупа S е лево нулта полугрупа од типот (3,2) .

Полугрупата S што е конструирана погоре ќе ја означиме со

$$S = [\, E,\, A,\, \psi,\, \Phi \,].$$

Со изнесените разгледувања е докажана следнава

Теорема 2. Полугрупата $S = [\, E, A, \psi, \Phi\,]$ е лево нулта полугрупа од типот (3,2). Обратно, ако S е лево нулта полугрупа од типот (3,2), тогаш постојат непразни дисјунктни множества E и A, пресликување $\psi\colon S\to E$ такво што $\psi|_E = \varepsilon_E$ и фамилија $\Phi = \{\varphi^e\colon A\to E \mid e\in E\}$ од пресликувања кои го задоволуваат условот (5), така што S да совпадне со полугрупата $S = [\, E, A, \psi, \Phi\,]$. ◊

Понатаму е изнесена структурата на десно нултите полугрупи од тип (3,2), аналогно на структурата на лево нултите полугрупи од истиот тип.

Нека E и A се две непразни дисјунктни множества и $S = E \cup A$. Нека $\psi: S \to E$ е пресликување такво што $\psi|_E = \varepsilon_E$. Нека $\Phi = \{ \varphi^e: A \to E \mid e \in E \}$ е фамилија пресликувања за која важи следново својство:

(9) $$\varphi^{\varphi^{\psi(z)}(y)} = \varphi^{\psi(y)}, \quad \text{за секои } x,y \in S.$$

Во S дефинираме операција со:

(10) $$xy = \begin{cases} y, & y \in E \\ \varphi^x(y), & x \in E, y \in A \\ \psi(x)y = \varphi^{\psi(x)}(y), & x, y \in A. \end{cases}$$

Се покажува дека S е ДНП од тип (3,2) во однос на погоре дефинираната операција. Да ја означиме вака конструиранаата полугрупа со $S = [E,A,\psi,\Phi]'$. Точна е следнава теорема

Теорема 2'. Полугрупата $S = [E,A,\psi,\Phi]'$ е десно нулта полугрупа од типот (3,2). Обратно, ако S е десно нулта полугрупа од типот (3,2), тогаш постојат непразни дисјунктни множества E и A, пресликување $\psi: S \to E$ такво што $\psi|_E = \varepsilon_E$ и фамилија $\Phi = \{ \varphi^e: A \to E \mid e \in E \}$ од пресликувања која го задоволува условот (9), така што S да совпадне со полугрупата $S = [E,A,\psi,\Phi]'$. ◊

Хомоморфизми и изоморфизми кај лево (десно) нултите полугрупи од тип (3,2)

Нека $S = [E,A,\psi,\Phi]$ и $S' = [E',A',\psi',\Phi']$ се лево нулти полугрупи од тип (3,2) и нека $f: S \to S'$ е хомоморфизам. Да забележиме дека $f|_E: E \to E'$. Ако $x \in E$, се добива дека $\varphi^e(x) = xe = x$. Така, фамилиите Φ, односно Φ', можеме да ги запишеме во облик

$\Phi = \{\varphi^e: S \to E \mid e \in E\}$, при што за секој $e \in E$, $\varphi^e|_E = \varepsilon_E$,

$\Phi' = \{\varphi'^{e'}: S' \to E' \mid e' \in E'\}$, при што за секој $e' \in E'$, $\varphi'^{e'}|_{E'} = \varepsilon_{E'}$.

Тогаш производите во S и S' ќе бидат дефинирани на следниов начин:

(11) $$xy = \varphi^{\psi(y)}(x) \quad \text{односно,} \quad x'y' = \varphi'^{\psi'(y')}(x').$$

Бидејки $f(xy) = f(\varphi^{\psi(y)}(x))$, а $f(x)f(y) = \varphi'^{\psi'(f(y))}(f(x))$, поради тоа што f е хомоморфизам, следува:

(12) $$(\forall x,y \in S) \quad f(\varphi^{\psi(y)}(x)) = \varphi'^{\psi'(f(y))}(f(x)).$$

Бидејки $\varphi^{\psi(y)}(x) = x\,\psi(y)$ и $\varphi'^{\psi'(f(y))}(f(x)) = f(x)\,\psi'(f(y))$, равенството (12) може да се запише и во следниов вид:

(13) $$f(x\psi(y)) = f(x)\,\psi'(f(y)), \text{ за } x,y \in S.$$

Ако во (12) се земе $y = e \in E$, со оглед на тоа што $\psi(e)=e$ и $\psi'(f(e))=f(e)$, се добива дека важи

(14) $$f(\varphi^e(x)) = \varphi'^{f(e)}(f(x)), \text{ за } x \in A, e \in E.$$

2068

Обликот на својствата (13) и (14) е "поприроден" и поедноставен од оној на (12) и при обратната проверка тие се користат кај производите дефинирани со (6).

Да претпоставиме сега дека $f: S \to S'$ е пресликување такво што $f_{|E}: E \to E'$ и за кое се задоволени својствата (13) и (14). Нека $x, y \in S$, тогаш:

(i) ако $x \in E$, па според тоа $xy = x$, имаме
$f(xy) = f(x) = f(x)\, f(y)$, бидејќи $f(x) \in E'$;

(ii) ако $x \in A$, $y \in E$, со оглед на (14) добиваме дека
$f(xy) = f(\varphi^{y}(x)) = \varphi'^{f(y)}(f(x)) = f(x)\, f(y)$;

(iii) ако $x, y \in A$, според (13) имаме дека
$f(xy) = f(x\psi(y)) = f(x)\, \psi'(f(y)) = f(x)\, f(y)$.

Така добиваме дека f е хомоморфизам. Ако f е биекција, тогаш ќе имаме дека S и S' се изоморфни, како и обратно. Со тоа е докажана следнава

Теорема 3. Нека $S = [E, A, \psi, \Phi]$ и $S' = [E', A', \psi', \Phi']$ се лево нулти полугрупи од тип (3,2). Постои хомоморфизам (изоморфизам) од S во S' ако и само ако постои пресликување (биекција) $f: S \to S'$ такво што $f_{|E}: E \to E'$ и за кое се задоволени својствата (13) и (14). ◊

Што се однесува до хомоморфизмите (изоморфизмите) кај десно нултите полугрупи, лесно може да се формулира дуалната теорема.

Литература

1. A. Kliford, G. Preston, Algebraiceskaja teorija polugrupp, (prevod od angliski), Moskva, 1972
2. Ѓ. Чупона, Б.Трпеновски, Предавања по алгебра, книга II, Универзитет "Кирил и Методиј", Скопје, 1973