

SLOBODNI f-IDEMPOTENTNI GRUPOIDI

Snežana Ilić*, Naum Celakoski**, Đorđi Čupona***

* Prirodno-matematički fakultet, Niš, S.R. Jugoslavija

** Mašinski fakultet, Skopje, R. Makedonija

*** MANU, Skopje, R. Makedonija

Apstrakt. Ispituje se problem određivanja slobodnog objekta sa bazom B u varijetetu grupoida sa aksiomom $f(x) = x$, a pritom se koristi apsolutno slobodni objekt sa bazom B .

0. Uvod

Ako je G neprazan skup, a $\cdot : (x, y) \mapsto xy$ preslikavanje iz G^2 u G , tada za par $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ kažemo da je *grupoid*.¹⁾ Za grupoid \mathbf{G} kažemo da je *injektivan* ako je odgovarajuće preslikavanje iz G^2 u G injektivno, t.j. $(\forall x, y, u, v \in G) (xy = uv \Rightarrow (x, y) = (u, v))$. Element $a \in G$ je *prost* u \mathbf{G} ako je $(\forall x, y \in G) a \neq xy$.

Pomoću prethodna dva pojma se dobija sledeća karakterizacija apsolutno slobodnog grupoida (t.j. slobodnog grupoida u varijetetu \mathbf{V} svih grupoida) ([1; L.1.5]).

Tvrđenje 0. Grupoid $\mathbf{F} = (F, \cdot)$ je apsolutno slobodan sa bazom B akko zadovoljava sledeća dva uslova:

- (i) Skup B prostih elemenata u \mathbf{F} je neprazan i generiše \mathbf{F} .
- (ii) \mathbf{F} je injektivan.

Nadalje, pretpostavljamo da je \mathbf{F} apsolutno slobodan grupoid sa bazom B . Koristićemo pojmove *dužina* $d(v)$ i *skup* $P(v)$ delova od v određene sa:

$|b| = 1, |tu| = |t| + |u|, P(b) = \{b\}, P(tu) = \{tu\} \cup P(t) \cup P(u)$,
za svaki $b \in B, t, u \in F$.

Označićemo sa $\mathbf{E} = (E, \cdot)$ apsolutno slobodni grupoid sa jednoelementnom bazom e , a njegove elemente sa f, g, h, \dots . Elemente iz \mathbf{E} zovemo *grupoidni stepeni*.

Interpretacija elementa $f \in E$ u grupoidu $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ je preslikavanje $f^G : G \rightarrow G$ definisano sa $f^G(a) = \varphi_a(f)$, gde je $\varphi_a : E \rightarrow G$ homomorfizam iz \mathbf{E} u \mathbf{G} koji je ekstenzija preslikavanja $\lambda : e \mapsto a$. Dakle, $e^G(x) = x, (fh)^G(x) = f^G(x)h^G(x)$, za svaki $f, h \in E, a \in G$. U slučaju $\mathbf{G} = \mathbf{F}$ i $\mathbf{G} = \mathbf{E}$ pišaćemo $f(u)$ i $f(g)$ umesto $f^G(u)$ i $f^G(g)$.

Posmatraćemo, najpre, interpretacije elemenata iz \mathbf{E} u apsolutno slobodnom grupoidu \mathbf{F} . Neka su $f, g \in E, t, u \in F$ proizvoljni elementi. Indukcijom po dužini ([5]), može se pokazati:

Tvrđenje 0.1. $|f(t)| = |f| |t|$.

Tvrđenje 0.2. $f(t) = g(u) \ \& \ |t| = |u| \Leftrightarrow (f = g \ \& \ t = u)$.

Tvrđenje 0.3. $f(t) = g(u) \ \& \ |t| \geq |u| \Leftrightarrow (\exists! h \in E) (t = h(u) \ \& \ g = f(h))$.

Analogna tvrđenja Tv.0.1'–Tv.0.3' prethodnim tvrđenjima, za \mathbf{E} su jasna, pa neće biti eksplicitno formulisana.

Definisaćemo na E novu operaciju " \circ " sa: $f \circ g = f(g)$.

Ako važi jednakost $f = g \circ h$, tada kažemo da je h *desni*, a g *levi delitelj* za f . Jasno je da su f i e i levi i desni delitelji za f . Reći ćemo da je f *reduciran* u E ako je

¹⁾ Pojmovi: podgrupoid, semigrupa, monoid, generatomi skup, homomorfizam grupoida, ... imaju uobičajeno značenje ([2]).

$$f \neq e \ \& \ (f = g \circ h \Rightarrow g = e \ \text{or} \ h = e).$$

Na ovaj način je konstruisan monoid (E, \circ, e) , za koji važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 0.4. Monoid (E, \circ, e) je slobodan. Baza je beskonačan prebrojiv skup reduciranih elemenata.

1. Slobodni f-idempotentni grupoidi

Pretpostavićemo, nadalje, da je $f \in E \setminus \{e\}$ fiksiran, a sa V_f ćemo označiti varijetet grupoida u kojima važi identitet $f(x) = x$. Naš cilj je da konstruišemo slobodan objekt u V_f sa datom bazom B . Pri tome ćemo koristiti sledeći rezultat, dokazan u [4].

Teorema 1.0. Neka je $R_f \in F$ određen sa:

$$R_f = \{u \in F \mid (\forall t \in F) f(t) \notin P(u)\},$$

i neka je za $u, v \in R_f$, $u * v$ definisan sa:

$$u * v = \begin{cases} uv, & uv \in R_f \\ t, & uv = f(t). \end{cases}$$

Tada:

- (i) $\mathbf{R}_f = (R_f, *)$ je grupoid sa najmanjim generatornim skupom B .
- (ii) Ako $\mathbf{G} = (G, \cdot) \in V_f$ i $\lambda : B \rightarrow G$, tada postoji (jedinstven) homomorfizam $\varphi : \mathbf{R}_f \rightarrow \mathbf{G}$ koji proširuje λ .
- (iii) Ako je f reduciran, tada $\mathbf{R}_f \in V_f$.
- (iv) Ako $\mathbf{R}_f \in V_f$, tada je \mathbf{R}_f slobodan objekt u V_f sa bazom B .

U radu ćemo dokazati sledeća tvrđenja.

Teorema 1. Ako je $f = g^{(n)}$,²⁾ gde je $g \in E$ reduciran, tada $\mathbf{R}_f \in V_f$.

Teorema 2. Neka je $f = g \circ h$, gde su $g, h \in E$ reducirani i pri tom $g \neq h$. Tada, $\mathbf{R}_f \in V_f$ akko $g \notin P(h)$.

2. Dokazi Teorema 1 i 2

Prvo, ako $f \in E$ i $\mathbf{G} = (G, \bullet)$ je grupoid, tada ćemo sa f^* označiti interpretaciju f u \mathbf{G} , t.j. $e^*(x) = x$, $(h_1 h_2)^*(x) = h_1^*(x) h_2^*(x)$, za svaki $x \in G$, $h_1, h_2 \in E$.

Dokaz Teorema 1

Neka je $f = g^{(n)}$, $n \geq 1$, i $g \in E$ reduciran element. Tada je

$$R_f = \{t \in F \mid (\forall \alpha \in F) g^{(n)}(\alpha) \notin P(t)\},$$

Neka je $t \in R_f$. Tada:

$$g^*(t) = \begin{cases} g(t), & t \neq g^{(n-1)}(\alpha_1) \\ \alpha_1, & t = g^{(n-1)}(\alpha_1), \end{cases}$$

$$t * u = \begin{cases} tu, & tu \in R_f \\ \alpha, & tu = g^{(n)}(\alpha). \end{cases}$$

²⁾ $g^{(1)} = g$, $g^{(k+1)} = g^{(k)} \circ g$

$$g^{(2)*}(t) = \begin{cases} g(\alpha_1), & t = g^{(n-1)}(\alpha_1) \\ \alpha_2, & t = g^{(n-2)}(\alpha_2) \\ g^{(2)}(t), & t \neq g^{(n-2)}(\alpha_2). \end{cases}$$

Pretpostavimo da za $k < n$ važi:

$$g^{(k)*}(t) = \begin{cases} g^{(k-1)}(\alpha_1), & t = g^{(n-1)}(\alpha_1) \\ g^{(k-2)}(\alpha_2), & t = g^{(n-2)}(\alpha_2) \\ \dots & \dots \\ \alpha_k, & t = g^{(n-k)}(\alpha_k) \\ g^{(k)}(t), & t \neq g^{(n-k)}(\alpha_k). \end{cases}$$

Prema tome, imamo:

$$g^{(n-1)*}(t) = \begin{cases} g^{(n-2)}(\alpha_1), & t = g^{(n-1)}(\alpha_1) \\ g^{(n-3)}(\alpha_2), & t = g^{(n-2)}(\alpha_2) \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n-1}, & t = g(\alpha_{n-1}) \\ g^{(n-1)}(t), & t \neq g(\alpha_{n-1}), \end{cases}$$

odakle sledi da je

$$g^{(n)*}(t) = \begin{cases} g^{(n-1)}(\alpha_1) = t, & t = g^{(n-1)}(\alpha_1) \\ g^{(n-2)}(\alpha_2) = t, & t = g^{(n-2)}(\alpha_2) \\ \dots & \dots \\ g(\alpha_{n-1}) = t, & t = g(\alpha_{n-1}) \\ t, & t \neq g(\alpha_{n-1}). \end{cases}$$

- Time smo pokazali da je $g^{(n)*}(t) = t$, t.j. $f^*(t) = t$, za svaki $t \in R_f$, pa $R_f \in V_f$. \diamond

Dokaz Teoreme 2

U L.2.1 i L.2.2 pretpostavićemo da $t \in R_f$.

Lema 2.1. Ako je $l^*(t) = l(t)$, za svaki $l \in P(f) \setminus \{f\}$, tada je $f^*(t) = t$.

Dokaz. Za $f = f_1 f_2$, imamo $f_1, f_2 \in P(f) \setminus \{f\}$, odakle sledi:

$$f^*(t) = f_1^*(t) * f_2^*(t) = f_1(t) * f_2(t) = t. \diamond$$

Lema 2.2. Neka $l \in E$ je takav da $l \in P(f) \setminus \{f\}$, $l^*(t) \neq l(t)$, I pri tom $|l|$ je najmanja. Tada postoje jedinstveni $u \in R_f$, $\xi \in E$, takvi da je $t = \xi(u)$, $f = l \circ \xi$.

Dokaz. Zbog $l^*(t) \neq l(t)$ imamo $l \neq e$, pa ako je $l = l_1 l_2$, tada: $l_1^*(t) = l_1(t)$, $l_2^*(t) = l_2(t)$, pa je $l^*(t) = l_1^*(t) * l_2^*(t) = l_1(t) * l_2(t) = l(t)$, odakle (prema definiciji $*$) sledi da je $l^*(t) = u$, gde je $l(t) = f(u)$. Zbog $|l| < |f|$, dakle $|t| > |u|$, prema Tv.0.3, postoji $\xi \in E$, takav da je $t = \xi(u)$, pa iz $(l \circ \xi)(u) = f(u)$ sledi $f = l \circ \xi$. \diamond

Lema 2.3. Neka je $f = g \circ h$, gde su $g, h \in E$, različiti reducirani elementi. Tada, postoji $t \in R_f$ takav da je $h^*(t) \neq h(t)$ akko $g \in P(h)$.

Dokaz. Neka $t \in R_f$ je takav da je $h^*(t) \neq h(t)$. Pokazaćemo da postoji $l \in P(h) \setminus \{h\}$, takav da je $l^*(t) \neq l(t)$. Zaista, kada bi bila tačna jednakost $l^*(t) = l(t)$, za svaki $l \in P(h) \setminus \{h\}$, tada bi imali $h_1^*(t) = h_1(t)$, $h_2^*(t) = h_2(t)$, gde je $h = h_1 h_2$. Odatle, zbog $u = h^*(t) \neq h(t) = h_1(t) h_2(t)$, imamo $h(t) = f(u)$. Iz poslednje jednakosti, zbog $|u| < |t|$ (prema Tv.0.3), postoji $\xi \in E$, takav da je $t = \xi(u)$, $h \circ \xi = f = g \circ h$, što nije moguće jer su g i h različiti reducirani elementi iz E .

Neka $l \in P(h) \setminus \{h\}$ je takav da je $l^*(t) \neq l(t)$, pri čemu $|l|$ je najmanja moguća. Ako je $l = l_1 l_2$, tada je $l^*(t) = l_1^*(t) * l_2^*(t) \neq l_1(t) * l_2(t) = l(t)$ akko je $l(t) = f(u)$. Odatle, prema Tv.0.3, dobijamo da je $t = \xi(u)$, $l \circ \xi = f = g \circ h$. Poslednja jednakost povlači da je g levi delitelj za l , a h desni delitelj za ξ , što je moguće samo ako je $l = g$, $\xi = h$.

Time smo dokazali da ako je $h^*(t) \neq h(t)$, za neko $t \in R_f$, tada $g \in P(h)$.

Pretpostavimo da $g \in P(h)$. Pokazaćemo da postoji $t \in R_f$ takav da je $h^*(t) \neq h(t)$. U tu svrhu, stavićemo $t = h(a)$, gde je $a \in B$. Tada $|t| = |h| < |f|$, odakle sledi da $t \in R_f$. (Naime, iz definicije skupa R_f sledi da ako $v \in F$ je takav da $v \notin R_f$, tada je $|f| \leq |v|$.) Dovoljno će biti da pokažemo da je $|h^*(h(a))| < |h|^2$.

Zbog toga što je $g(h(a))$ deo od $h(h(a))$, i $g^*(h(a)) = a$, na osnovu Tv.0.1 i Tv.0.1', dobijamo da važi gornja nejednakost. \diamond

Lema 2.4. Ako $g \notin P(h)$, tada $R_f \in V_f$.

Dokaz. Prema L.2.3 imamo $h^*(t) = h(t)$, za svaki $t \in R_f$. Odatle sledi da je $f^*(t) = g^*(h^*(t)) = g^*(h(t)) = t$. \diamond

Lema 2.5. Ako $g \in P(h)$, tada $R_f \notin V_f$.

Dokaz. Kao i u poslednjem delu dokaza L.2.3, stavićemo $t = h(a)$, gde je $a \in B$. Prema L.2.3, imamo $u = h^*(t) \neq h(t)$. Treba pokazati da je $g^*(u) = g^*(h^*(t)) \neq t$.

Ako je $u = h(v)$, tada $f^*(t) = g^*(u) = g^*(h(v)) = v \neq t$.

Preostaje slučaj kada je, za svaki v , $u \neq h(v)$. Tada je

$$g^*(u) = g(u) = g(h^*(t)) \neq t = h(a).$$

Jednakost $g(u) = h(a)$ nije moguća budući, prema Tv.0.3, iz nje bi sledilo da postoji $\xi \in E$, takav da je $u = \xi(a)$, a zatim i $g \circ \xi = h$, što protivreči činjenici da su g i h različiti reducirani elementi iz E . \diamond

Time smo kompletirali dokaz Teoreme 2.

Literatura

- [1] R.H. Bruck, *A Survey of Binary Systems*, Springer-Verlag, 1958.
- [2] P.M. Cohn, *Universal Algebra*, Harper & Row, 1965.
- [3] Ć. Čupona, N. Celakoski, *Free groupoids with $x^n = x$* , Proceed. of the First Congress of Math. and Informat. of Rep. of Macedonia, Ohrid 1996, p.19–25.
- [4] Ć. Čupona, S. Ilić, *Free groupoids with $x^n = x$* , II, Novi Sad J.Math., Vol. 29, No. 1, 1999, 147–154
- [5] Ć. Čupona, N. Celakoski, S. Ilić *Grupoid powers*, Matematički bilten, Skopje, Macedonia, 25(LI)(2001), 5-12.